n.v.

Silv. Franc. Lacroix's

Algebra.

Erster Theil.

Anfangsgründe.

Aus dem Französischen übersetzt, nach der zwölften verbesserten und vermehrten Ausgabe,

von

D. J. P. Gruson,

Königl. Preuß. Geheimen Hofrath, ordentlichem Mitgliede von der mathematischen Klasse der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin, Professor an der Berliner Universität, bei dem Königl. Cadetten-Corps, bei der Bau-Akademie, und Oberlehrer der Mathematik und Physik bei dem französischen Gymnasium u. s. w.

Berlin,

Verlag von Duncker und Humblot.

1821.

Die Anfangsgründe

der

Algebra,

von

S. F. Lacroix.

Aus dem Französischen übersetzt, nach der zwölften verbesserten und vermehrten Ausgabe,

von

D. J. P. Gruson,

Königl. Preuß. Geheimen Hofrath, ordentlichem Mitgliede von der mathematischen Klasse der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin, Professor an der Berliner Universität, bei dem Königl. Cadetten-Corps, bei der Bau-Akademie, und Oberlehrer der Mathematik und Physik bei dem französischen Gymnasium u. s. w.

Berlin,

Verlag von Duncker und Humblot.

1821.

K. PROVINZIAL REALSCHULE STRAUBING

13170915?

Stadtl. Bibliothek
Passau

Vorrede des Uebersetzers.

Da die Uebersetzung der Elémens d'algèbre, par *S. F. Lacroix*, welche Herr E. M. Hahn 1804 gegeben, nach der 3ten Ausgabe des Originals bearbeitet war, das Werk aber in den zahlreichen folgenden Ausgaben, besonders in der siebenten, bedeutende Veränderungen erfahren hatte, so schien es an einer Uebersetzung zu fehlen, welche dieses treffliche Lehrbuch in seiner gegenwärtigen Gestalt, treu, und ohne entbehrliche Zusätze, wiedergäbe. Eine Fülle von Beispielen und Aufgaben ist zwar dem Anfänger sehr nützlich, kann aber nicht leicht in einem Lehrbuche Platz finden, und es schien mir gar nicht erforderlich, das gegenwärtige damit anzuschwellen und dadurch zu vertheuren, da wir die noch unübertroffene Beispielsammlung von Meier Hirsch *) besitzen, die überall verbreitet ist. Wer sich dieser Beispielsammlung zur eignen Uebung bedient, dem kommen dabei zu Hilfe die Auflösungen, welche Herr S. Sachs **) hierzu herausgegeben, und ein neueres Werk von Herrn P. M. C. Egen ***), worin

---

*) Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, von Meier Hirsch. Dritte verbesserte Auflage. Berlin 1816.

**) Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung von Beispielen ꝛc. aus der Buchstabenrechnung und Algebra enthaltenen Gleichungen und Aufgaben, von S. Sachs. Dritte Auflage. Berlin, 1820.

***) Handbuch der allgemeinen Arithmetik, von P. M. C. Egen; besonders in Beziehung auf die „Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, von Meier Hirsch." Band 1. Die Buchstabenrechnung. Bd. 2. Die Algebra gr. 8. Berlin 1820.

die in Meier Hirsch vorkommenden Schwierigkeiten vollkommener erörtert sind. Das letztere Werk enthält auch, besonders im zweiten Theile, viele interessante Untersuchungen, die von großer Sachkenntniß und Belesenheit zeigen, und hier, als in einem Handbuche, an ihrem Platze sind. Ich mußte mich daher in diesen Anfangsgründen um so mehr an den Text halten, welchen Lacroix gegeben, und ich erwähne nur noch, daß meine Uebersetzung nach der zwölften Ausgabe, Paris 1818, gearbeitet ist.

Der allgemein anerkannte Werth der Lacroixschen Algebra hat schon im Jahr 1811 dem Herrn Professor Metternich einer Bearbeitung werth geschienen, die der Verfasser bescheiden eine Uebersetzung nennt, die aber nicht den verdienten Abgang gefunden haben muß, da sie 1820 mit neuem Titel und neuer Vorrede, als zweite Auflage, wieder ins Publikum gebracht worden. Bekanntlich hat Lacroix seine Algebra gewissermaßen durch einen zweiten Theil erweitert, in seinem Complément des élémens d'Algèbre. Dieser ist auch schon längst deutsch erschienen, in einer Uebersetzung des Herrn E. M. Hahn *), welcher mehrere andere von Lacroix's Elementarbüchern (die Arithmetik, die Geometrie, die weitere Ausführung der letztern, und die Trigonometrie) in deutscher Uebersetzung herausgegeben hat, und es ist erfreulich, daß die Aufmunterung, welche die mathematischen Studien jetzt finden, zu dergleichen Unternehmungen veranlaßt.

Berlin, den 23. October 1820.

J. P. Gruson.

---

*) S. F. Lacroix's Anfangsgründe der Algebra. Aus dem Französischen übersetzt, und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet, von E. M. Hahn. 2r Theil. Berlin 1805.

Inhalt.

Seite

Vorläufige Kenntniß von dem Uebergange der Arithmetik zur Algebra. Erklärung und Gebrauch der algebraischen Zeichen. 1

Welches ist die Natur und der Zweck der Algebra. ebend.

Von den Zeichen, deren man sich in der Algebra bedient. 3

Auflösung einiger Aufgaben vermittelst der algebraischen Zeichen. 4

Was ist eine Formel. 12

Von den Gleichungen. 14

Was man machen muß, um eine Aufgabe durch Hülfe der Algebra aufzulösen. 15

Was ist eine Gleichung, eine ihrer Seiten, (Hälften), ein Glied. 15

Von der Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer einzigen unbekannten Größe. 17

Von den zu befolgenden Regeln, um ein Glied aus einem Theile der Gleichung in den andern zu bringen. 19

Um die unbekannte von der sie multiplicirenden Größe zu befreien. 21

Die Nenner wegzuschaffen. 23

Wie man zu verfahren hat, um eine Aufgabe in Gleichung zu setzen 25

Beispiele. 25

Methoden, die Rechnung durch Buchstaben, so weit es möglich, zu vollziehen. 31

Erläuterungen der Wörter Monomen, Binomen u. s. w., Polynomen, incomplex und complex. 32

Von der Addition algebraischer Größen. 33

Was man einen Coefficienten nennt. 33

Die bei der Addition zu beobachtende Regel. 34

Die bei der Reduction algebraischer Größen zu beobachtende Regel. 35

Von der Subtraction algebraischer Größen. 36

Regel zur Subtraction. 37

Seite

Von der Multiplication algebraischer Größen. 38

Die Art, die Multiplication der algebraischen Größen anzuzeigen. 38
Was eine Potenz sei. 40
Was ein Exponent sei. 41
Wie man die Potenzen von einer Zahl erhält. 41
Regel für die Multiplication eintheiliger Größen. 41
Was der Grad eines Products sei. 42
Note über das Wort Dimension. 42
Von der Multiplication der complexen Größen. 43
Regeln der Zeichen. 44
Regeln, die Multiplication zu verrichten. 45
Beispiel zur Multiplication der complexen Größen. 47
Was ein homogener Ausdruck sei. 50
Ausdruck des Products der Summe zweier Größen mit ihrer Differenz, des Quadrats und des Kubus eines Binomen. 51
Die Art, die Multiplication der complexen Größen anzuzeigen. 51

Von der Division algebraischer Größen. 52

Regeln für die Division der Monomen. 52
Was eine Größe bezeichnet, deren Exponent Null sei. 54
Wie man eine angezeigte Division vereinfacht, wenn man sie nicht ausführen kann. 55
Division der complexen Größen. 58
Was es heißt, die Glieder einer Größe ordnen. 58
Regeln um die Division zu machen. 60
Beispiele für die Division. 61
Wie man zu verfahren habe, wenn verschiedene Glieder eine und dieselbe Potenz von den Buchstaben enthalten, nach welchen man geordnet hat. 64
Beispiele. 64

Von den algebraischen Brüchen. 66

Wie man erkennt, daß eine Division der complexen Größen nicht ausgeführt werden kann. 67
Wie man, wenn es möglich, die Brüche, welche man erhält, vereinfacht. 67
Was der größte gemeinschaftliche Theiler zweier algebraischer Größen sei. 67
Wie man ihn bestimmt. 68
Nöthige Vorsicht zum Gelingen der Operation, wenn die Größe, die man als Divisor wählt, mehrere Glieder enthält, in welchen der Buchstabe, nach welchem man geordnet hat, sich auf demselben Grad befindet. 72
Was man machen muß, um sogleich die von diesem Buchstaben unabhängigen Divisoren zu erhalten. 74

Seite.

Kurze Wiederholung der Regeln des Calculs mit Brüchen. 76
Auflösung einer Buchstabengleichung vom ersten Grade. 79

Aufgaben mit zwei unbekannten Größen und von den negativen Größen. 80

Beispiele. 80
Was man machen muß, wenn man zu einer Gleichung kommt, deren zwei Seiten mit dem Zeichen — behaftet sind. 83
Aufgabe, in welcher der Werth von einer der unbekannten Größen mit dem Zeichen — behaftet ist. 84
Was dieses Zeichen bedeutet. 85
Wie die mit dem — Zeichen behafteten Glieder den Gleichungen der Aufgabe ein Genüge leisten sollen. 88
Summarischer Inhalt der vorhergehenden Bemerkungen. 90
Was es mit den negativen Werthen für eine Bewandniß habe. 91
Beweis der Regeln der Rechnung mit isolirten negativen Größen. 92
Wie, in Bezug auf ihre Zeichen, die isolirten Monomen sich verbinden. 93
Wie man den wahren Vortrag von einer Aufgabe finden kann, für welche man auf negative Werthe gestoßen ist. 94
Aufgabe, deren verschiedene Fälle Beispiele von verschiedenen Sonderbarkeiten darbieten, welche die Ausdrücke der unbekannten in den Gleichungen vom ersten Grade darbieten können. 94
Was das Resultat $\frac{m}{o}$ bedeutet. 101
——— Resultat $\frac{o}{o}$. 103
Note über den Gebrauch des Worts identisch. 103
Allgemeine Schlußfolge aus dem was vorhergehet. 105
Gebrauch der Zeichenveränderung der Größen, um mehrere Aufgaben in eine einzige zu fassen. 105
Auflösung der vorhergehenden Aufgaben, wenn nur eine einzige unbekannte Größe darin angewandt wird. 106
Aufgaben, welche zu allgemeinen Gleichungen vom ersten Grade mit zwei unbekannten Größen führen. 110

Von der Auflösung einer beliebigen Anzahl Gleichungen vom ersten Grade, welche eine ähnliche Anzahl unbekannter Größen enthalten. 114

Allgemeine Regel, um daraus eine Gleichung einer einzigen unbekannten Größe abzuleiten, indem man nach und nach alle andern wegschafft oder eliminirt. 114
Beispiele. 115
Aufgaben, die aufgelöst werden sollen. 121

Seite

Allgemeine Formeln zur Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade. 124

Allgemeines Verfahren, um zwischen zwei Gleichungen eine unbekannte Größe vom ersten Grade zu eliminiren. 124

Allgemeine Werthe der unbekannten Größen in den Gleichungen vom ersten Grade mit drei unbekannten Größen. 129

Allgemeine Regel um die Werthe der unbekannten zu bilden. 131

Anwendung der allgemeinen Formeln. 132

Von den Gleichungen des zweiten Grades mit einer unbekannten Größe. 135

Beispiele von Gleichungen des zweiten Grades, die nur ein unbekanntes Glied enthalten. 134

Von der Ausziehung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen. 136

Von Zahlen die keine vollkommene Quadrate sind. 142

Kennzeichen, an welchen man erkennt, daß die gefundene Wurzel nicht zu klein ist. 143

Wie man das Quadrat von einem Bruche macht, und wie man daraus die Wurzel ziehet. 143

Jede Primzahl, welche das Product aus zwei Zahlen dividirt, dividirt nothwendig eine von diesen Zahlen. 145

Die ganzen Zahlen, die keine Quadrate sind, haben weder in ganzen noch in Bruchzahlen eine Wurzel. 147

Was heißt incommensurabel oder irrational. 148

Wie man durch ein Wurzelzeichen die auszuziehenden Wurzeln anzeigt. 148

Methode sich den Wurzeln zu nähern. 149

Methode, die Wurzelausziehung durch Division abzukürzen. 151

Methode, um sie durch gewöhnliche Brüche unbegrenzt fortzusetzen. 152

Wie man auf die möglich einfachste Art die genäherte Wurzel eines Bruchs, dessen Glieder keine Quadrate sind, erhalten kann. 153

Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade, die nur das Quadrat der unbekannten Größe enthalten. 154

Die Quadratwurzel aus einer Größe kann mit dem Zeichen + oder mit dem Zeichen — genommen werden. 156

Die Quadratwurzel aus einer negativen Größe ist imaginair. 158

Von den vollständigen Gleichungen des zweiten Grades. 159

Allgemeine Formel für die Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe. 161

Allgemeine Regel, die man um sie aufzulösen befolgen muß. 162

Beispiele, bei welchen man die Eigenschaften der negativen Werthe zeigt. 163

Aufgabe, welche zeigt, in welchen Fällen die Aufgaben vom zweiten Grade ungereimt werden. 167

Seite

Von den Ausdrücken, die man imaginair nennt. 169
Directer Beweis, daß die Gleichungen vom zweiten Grade immer zwei Wurzeln haben. 169
Auflösung einiger Aufgaben. 170
Aufgabe, die zu sonderbaren Werthen führt, wenn man sie nach der allgemeinen Regel auflöset. 175

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus algebraischen Größen. 181
Transformation, mittelst welcher man die Wurzelgrößen vereinfachen kann. 181
Ausziehung der Quadratwurzel aus Monomen. 182
——— — ——— aus Polynomen. 184

Von der Bildung der Potenzen von Monomen, und von der Ausziehung ihrer Wurzeln. 188
Tafel der sieben ersten Potenzen der Zahlen von 1 bis 9. 189
Wie man eine monomische Größe zu einer beliebigen Potenz erhebt. 190
Wie man aus einer monomischen Größe eine Wurzel von einem beliebigen Grade auszieht. 191
Wie man einen monomischen Wurzelausdruck vereinfacht. 192
Von den imaginairen Wurzeln überhaupt. 193
Von den Brucherponenten. 194
Von den negativen Exponenten. 195

Von der Bildung der Potenzen complexer Größen. 196
Art diese Potenzen anzuzeigen. 196
Form eines Products von einer beliebigen Anzahl Factoren vom ersten Grade. 197
Bemerkungen, vermittelst welcher man aus diesem Producte die Entwickelung der beliebigen Potenz von einem Binomen ableitet. 200
Allgemeine Theorie der Permutationen und der Combinationen. 202
Bildung der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Binoms. 205
Allgemeines Glied von der Formel des Binoms. 206
Anwendung von der Formel des Binoms auf Beispiele. 207
Transformation dieser Formel, um den Gebrauch zu erleichtern. 209
Anwendung auf ein Trinom. 210

Von der Wurzelausziehung aus complexen Größen. 211
Von der Ausziehung der Kubikwurzel aus ganzen Zahlen. 212
Von der Ausziehung der Kubikwurzel aus Brüchen. 216
Verfahren, um sich der Kubikwurzel aus Zahlen, die keine vollkommene Kubikzahlen sind, zu nähern. 218
Von der Wurzelausziehung höheren Grades. 220
Von der Wurzelausziehung aus Buchstabengrößen. 223

Seite

Von den Gleichungen mit zwei Gliedern. 225

Division von $x^m - a^m$ durch $x - a$. 227

Von den Factoren der Gleichung $x^m - a^m = 0$, und von den Wurzeln aus der Einheit. 228

Allgemeines Gesetz über die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung, und Unterscheidung der arithmetischen Bestimmungen und der algebraischen Bestimmungen der Wurzel aus Zahlen. 229

Bestimmung ihrer verschiedenen Wurzeln. 230

Von den Gleichungen, welche sich auf eine ähnliche Art wie die Gleichungen vom zweiten Grade auflösen lassen. 231

Von der Rechnung mit Wurzelgrößen. 234

Verfahrungsarten, um mit den Wurzelgrößen von einerlei Grade die vier Hauptoperationen auszuführen. 235

—— um eine Wurzelgröße auf eine beliebige Potenz zu erheben. 237

—— um daraus eine Wurzel von einem beliebigen Grade auszuziehen. 238

—— um Wurzelgrößen von verschiedenen Graden auf einerlei Grad zu bringen. 239

—— um einen vor dem Wurzelzeichen stehenden Factor unter das Wurzelzeichen zu bringen. 240

—— für die Multiplication und Division beliebiger Wurzelgrößen. 240

Bemerkungen über einige sonderbare Fälle der Rechnung mit Wurzelgrößen. 241

Bestimmung des Products $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$. 241

Von den verschiedenen Ausdrücken des Products $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$. 242

Von der Rechnung mit gebrochenen Exponenten. 245

Wie man hieraus die gegebenen Regeln für die Rechnung mit Wurzelgrößen folgert. 246

Woran der Vortheil hängt, den er über den letztern hat. 247

Allgemeine Theorie der Gleichungen. 248

Unter welche Form man die Gleichungen stellt. 249

Hauptsache dieser Theorie. 249

Was man unter Wurzel einer Gleichung versteht. 250

Von der Zerlegung der Gleichungen in einfache Factoren oder vom ersten Grade. 250

Von der Anzahl der Divisoren vom ersten Grade, welche eine Gleichung haben kann. 252

Von der Zusammensetzung einer Gleichung aus einfachen Factoren oder vom ersten Grade. 253

Seite

Bildung ihrer Coefficienten. 254
Note über die Zusammensetzung der Gleichungen. 255
Wie viel eine Gleichung Factoren von einem gegebenen Grade haben kann. 256

Von der Elimination zwischen den Gleichungen, die den ersten Grad übersteigen. 258

Durch Substitution des Werths von einer der unbekannten. 258
Regel um ein Wurzelzeichen fortzuschaffen. 259
Allgemeine Formeln von Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, und wie man sie unter die Form einer Gleichung mit einer unbekannten setzt. 260
Eliminationsformel zwischen zwei Gleichungen vom zweiten Grade. 261
Bedingung, welche die Werthe von einerlei unbekannten, die zwei Gleichungen gemein ist, erfüllen müssen. 262
Wie die Aufsuchung des zwei Gleichungen gemeinschaftlichen Divisors zur Elimination von einer der unbekannten führt. 263
Was man machen muß, wenn man einen Werth von einer der unbekannten in der Endgleichung erhalten hat, um zu dem der andern bekannten zu kommen. 263
Verfahren, um zwischen zwei beliebige Gleichungen eine unbekannte zu eliminiren. 265
Sonderbarer Fall, in welchem die vorgegebenen Gleichungen die Aufgabe unbestimmt lassen oder auch widersprechend sind. 266
Verfahren, welches Euler statt des gemeinschaftlichen Divisors substituirt. 268
Unbequemlichkeiten der successiven Elimination der unbekannten, wenn man mehr denn zwei Gleichungen hat, und Anzeigung des Grades, auf welchen die Endgleichung steigen muß. 273

Vom Aufsuchen der commensurablen Wurzeln und von dergleichen Wurzeln numerischer Gleichungen. 274

Jede Gleichung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, der des ersten Gliedes 1 ist, kann nur ganze Zahlen oder incommensurable Wurzeln haben. 274
Wie man die Brüche in einer Gleichung wegschafft. 275
Untersuchung der commensurabeln Divisoren vom ersten Grade. 277
Wie man eine Gleichung erhalten kann, deren Wurzeln die Differenz zwischen einer der Wurzeln von der vorgegebenen Gleichung und aller andern sind. 283
Aufsuchung der gleichen Wurzeln. 284
Bildung der Differenzgleichung zwischen allen Wurzeln zu zwei und zwei genommen, und von der Quadratgleichung dieser Differenzen. 288
Mittel, um ein beliebiges Glied aus einer Gleichung fortzuschaffen. 290
Von der Zerlegung der Gleichungen in Factoren vom zweiten Grade. 291

Seite

Von der Auflösung der numerischen Gleichungen durch Näherung. 293

Wie man erkennen kann, daß eine Gleichung eine zwischen zwei gegebenen Zahlen enthaltene Wurzel hat. 293

Note über die Veränderung des Werths der Polynomen. 295

Bestimmung einer Zahl, welche das erste Glied größer als die Summe aller übrigen macht. 298

Jede Gleichung von ungeradem Grade hat wenigstens eine reelle Wurzel mit einem entgegengesetzten Zeichen von dem des letzten Gliedes. 301

Jede Gleichung von geradem Grade hat wenigstens zwei reelle Wurzeln und mit entgegengesetzten Zeichen, wenn ihr letztes Glied negativ ist. 301

Bestimmung von den Grenzen der Wurzeln, in einem Beispiel. 302

Anwendung der Newtonschen Methode auf dieses Beispiel, um sich den Wurzeln einer Gleichung zu nähern. 302

Kennzeichen, an welchen man den erreichten Grad der Genauigkeit erkennt. 304

Unbequemlichkeit dieser Methode, wenn die Wurzeln wenig von einander verschieden sind. 306

Note über die gleichen Wurzeln. 305

Wie man das Dasein von reellen und ungleichen Wurzeln außer allen Zweifel setzt, es sei durch die Quadratgleichung der Differenzen der Wurzeln. 307

——— es sei indem man die Wurzeln durch mehr oder weniger große Zahlen multiplicirt. 309

Gebrauch der Division der Wurzeln, um die Auflösung einer Gleichung zu erleichtern, deren Coefficienten große Zahlen sind. 310

Lagrange's Approximationsmethode. 310

Von den Proportionen und Progressionen. 314

Haupteigenschaften der arithmetischen Verhältnisse und von der Proportion. 315

Aenderungen, die man mit den Proportionen vornehmen kann. 316

Von der arithmetischen Progression. 321

Allgemeines Glied. 322

Summe 323

Von der geometrischen Progression, 324

Allgemeines Glied, 325

Summe. 325

Von der geometrischen Progression, deren Summe eine bestimmte Grenze hat. 328

Wie man alle Glieder von einer geometrischen Progression aus dem Ausdruck ihrer Summe ableitet. 329

Division von m durch $m-1$, ins Unendliche fortgesetzt. 328

Seite

In welchem Fall der Quotient dieser Operation convergent ist, und für den genäherten Werth des Bruchs $\frac{m}{m-1}$ genommen werden kann. 331

Was divergirende Reihen sind. 332

Theorie der Exponentialgrößen und der Logarithmen. 332

Von der Bande, welchen die verschiedenen Arten zu calculiren unter sich haben. 333

Merkwürdige Folgen, die aus der Erzeugung der Zahlen mittelst der Potenzen von einer einzigen entstehen. 335

Was ein Logarithmus sei, was eine Basis der Logarithmen sei. 337

Wie man logarithmische Tafeln berechnet. 337

Note, welche die von Long vorgeschlagene Methode enthält, und die Tafel der Decimalpotenzen von 10. 339

Was die Characteristik der Logarithmen ist. 342

Von den Logarithmen der Brüche. 343

Von den arithmetischen Complementen. 344

Wie man von einem Logarithmensystem zu einem andern übergeht. 347

Wo der Logarithmus von Null sei. 347

Anwendung der Logarithmen zur numerischen Berechnung algebraischer Formeln. 348

Anwendung der Logarithmen zur Regeldetri. 349

Die Logarithmen der in geometrischer Progression stehenden Zahlen stehen in arithmetischer Progression. 349

Anwendung der Logarithmen auf die Auflösung der Gleichungen, wo die unbekannte Größe als Exponent vorkommt. 350

Aufgaben in Bezug der Geldzinsen. 350

Von dem einfachen Zins. 352

Vom zusammengesetzten Zins. 352

Von den Jahrrenten. 356

Wie man die zu verschiedenen Zeiten zahlbare Summe mit einander vergleichen kann. 358

Zu. 359

Note über die Aufgabe mit den Boten. 359

Druckfehler.

Seite 14, Zeile 11, statt $5x$ lies $3x$

— 32, — 21, lies Operationen in

— 43, — 18, statt sud lies sub

— 46, — 13, — + lies —

— 90, §. 61, Zeile 3, lies: Widersprüche finden können

Alphabet,

um das Lesen der Calculs, worin von diesen griechischen Buchstaben Gebrauch gemacht worden, zu erleichtern.

Αα	Alpha.
Ββϐ	Bèta.
Γγϛ	Gamma.
Δδ	Delta.
Εε	Epsilon.
Ζζ	Zèta.
Ηη	Êta.
Θθϑ	Thèta.
Ιι	Iota.
Κκ	Kappa.
Λλ	Lamda.
Μμ	Mi.
Νν	Ni.
Ξξ	Xi.
Οο	Omicron.
Ππϖ	Pi.
Ρρϱ	Rho.
Σσς	Sigma.
Ττ	Tau.
Υυ	Ypsilon.
Φφ	Phi.
Χχ	Chi.
Ψψ	Psi.
Ωω	Oméga.

Vorläufige Kenntniß von dem Uebergange der Arithmetik zur Algebra. Erklärung und Gebrauch der algebraischen Zeichen.

§. 1. In den Anfangsgründen der Arithmetik hat man Gelegenheit gehabt, mehrere Aufgaben zu bemerken, deren Auflösung aus zwei verschiedenen Theilen besteht. Der erste hat zum Zweck: aufzusuchen, welche von den vier Rechnungsarten angewendet werden müsse, um die unbekannte Zahl mittelst der gegebenen Zahlen zu bestimmen; und der andere die Anwendung von diesen Regeln. Der erste Theil, unabhängig von jedem Zahlensysteme, beruht gänzlich auf der Entwickelung der Schlußfolgen, die deutlich oder verwickelt aus dem Vortrage oder aus der Art, wie derselbe die gegebenen Zahlen mit den unbekannten Zahlen verbindet, d. h. aus den Relationen, welche sie zwischen den Zahlen aufstellt, hervorgehen. Man kann überhaupt, wenn diese Relationen nicht verwickelt sind, durch bloßes Raisonnement den Werth der unbekannten Zahlen finden. Man darf nur die Bedingungen, welche die ausgesagten Relationen enthalten, zerlegen, indem man sie in eine Folge von gleichbedeutenden wörtlichen Ausdrücken übersetzt, deren letzterer in folgenden Worten abgefaßt sein muß: die

unbekannte Zahl ist gleich der Summe oder der Differenz oder dem Product oder dem Quotienten von dieser oder jener Größe. Das folgende Bispiel wird das Dunkele aufhellen, welches sich etwa in diesen allgemeinen Begriffen finden möchte.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei Thile theilen, so daß der eine Theil den andern um eine gegebene Größe übertreffe.

Um dahin zu gelangen, bemerke man: 1) daß

der größere Theil gleich sei dem kleinern sammt dem gegebenen Ueberschusse;

und daß folglich, wenn der kleinere bekannt wäre, dieser ebst dem Ueberschusse uns die größere gäbe; 2) daß

der größere Theil mit dem kleinern Theil zusammengenommen die zu theilende Zahl bilden.

Substituiren wir nun in dieser letzten Phrase für e Worte: der größere Theil den weiter oben stehend gleich geltenden Ausdruck, nämlich: der kleinere The sammt dem gegebenen Ueberschusse, so findet man, da

der kleinere Theil sammt dem gegebenen Ueberschusse und noch einmal der kleinere Theil zusammn die zu theilende Zahl bilden.

Aber alsdann kann die Phrase abgekürzt werden, indem man sie so ausdrückt:

Zweimal der kleinere Theil nebst dem gegebene Ueberschusse bilden zusammen die zu theilende Zahl.

Und man schließt hieraus nothwendig, daß

zweimal der kleinere Theil gleich ist der um de Ueberschuß verminderten Zahl.

Folglich ist

der kleinere Theil, einmal genommen, so groß als die Hälfte des Unterschiedes zwischen der zu theilenden Zahl und dem Ueberschusse.

Oder, welches einerlei,

der kleinere Theil ist gleich der halben zu theilenden Zahl weniger dem halben Ueberschusse.

Die vorgelegte Aufgabe ist nun aufgelöst, weil, um die gesuchten Theile zu erhalten, man nur noch bloße arithmetische Operationen mit bekannten Zahlen zu machen hat.

Wenn z. B. die zu theilende Zahl 9 und der Ueberschuß des größern Theils über den kleinern 5 wäre, so würde nach der obigen Regel der kleinere Theil sein: $\frac{9}{2}$ weniger $\frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$; und der größere Theil, bestehend aus dem kleinern Theil sammt dem Ueberschusse 5, wird gleich 7 sein.

§. 2. Die Raisonnements, sehr einfach in der eben vorgelegten Aufgabe, aber in andern sehr verwickelt, sind im Allgemeinen aus einer gewissen Anzahl von Wortausdrücken zusammengesetzt, z. B.: **hinzugefügt zu, vermindert um, ist gleich** ꝛc., die öfters wiederholt sind und die von den Operationen abhangen, durch welche die in der Aussage der Aufgaben vorkommenden Größen unter sich verbunden sind. Es ist sichtbar, daß man sehr abkürzen würde, wenn man sich der Zeichen statt der Wörter bediente; und so macht man es denn auch, nämlich:

Um die Addition anzuzeigen, bedient man sich des Zeichens + und spricht es aus: **plus** (**addirt zu**).

Bei der Subtraktion bedient man sich des Zeichens —, welches **minus** ausgesprochen wird.

Die Multiplication wird durch × bezeichnet und spricht sich mit: **multiplizirt durch**, aus.

Um zu schreiben, daß zwei Größen, die eine durch die andere dividirt, werden solle, setzt man die zweite unter die erste und trennt sie durch einen Strich: $\frac{5}{4}$ bedeutet: 5 dividirt durch 4.

Um endlich zu bezeichnen, daß zwei Größen gleich sind,

setzt man zwischen ihre Ausdrücke das Zeichen =, welches gleich gelesen wird.

Diese Abkürzungen, so beträchtlich sie auch schon sind, sind doch nicht hinreichend, denn man ist genöthigt, oft zu wiederholen: die zu theilende Zahl, die gegebene Zahl ꝛc., der kleinere Theil, die gesuchte Zahl, ꝛc. welches sehr ausdehnt. In Ansehung der gegebenen Zahlen war das Auskunftmittel, welches sich zuerst zu ihrer Darstellung darbot, bestimmte Zahlen zu nehmen, die als Beispiele dienen, wie in der Arithmetik geschieht; dies war aber in Betreff der unbekannten Zahlen nicht möglich; man wählte daher ein Zeichen, welches mit der Zeit geändert worden. Man vereinigte sich endlich, die Buchstaben des Alphabets anzuwenden; sonst bedient man sich immer der letztern Buchstaben des Alphabets, wie man in der Arithmetik x als viertes Glied einer Proportion setzt, von der man nur die drei ersten Glieder kennt; und aus dem Gebrauch dieser verschiedenen Zeichen ist die Algebra hervorgegangen.

Mit Hülfe dieser Zeichen nehme ich die Aufgabe aus §. 1. von neuem vor und stelle die unbekannte oder kleinere Zahl durch einen Buchstaben etwa durch x vor; die zu theilende Zahl und den gegebenen Ueberschuß durch die zwei Zahlen 9 und 5; so wird der größere der gesuchten Theile durch $x + 5$ ausgedrückt sein, und ihre Summe durch $x + 5 + x$. Man wird also haben

$$x + 5 + x = 9;$$

schreibt man aber $2x$ für das Doppelte von x, so gehet hieraus hervor

$$2x + 5 = 9.$$

Da nun dieser Ausdruck angiebt, daß 5 zu $2x$ hinzugesetzt werden muß, um 9 zu bilden, so schließe ich hieraus, daß $2x = 9 - 5$ oder daß $2x = 4$, und endlich $x = \frac{4}{2} = 2$.

Vergleicht man nun, was die vermittelst der angenom-

menen Zeichen hingeschriebenen abgekürzten Ausdrücke bezeichnen, mit denen, welche uns durch bloßes Raisonnement zu der Auflösung geführt haben, so werden wir sehen, daß die einen nur Uebersetzungen der andern sind.

Das Resultat 2 der vorhergehenden Operationen kommt nur dem gewählten vorgeschriebenen Beispiele zu; indessen das bloße Raisonnement, indem es uns lehrt: **der kleinere Theil ist gleich der Hälfte der zu theilenden Zahl weniger der Hälfte des gegebenen Ueberschusses**, zeigt uns, wie die unbekannte Zahl aus den bekannten sich zusammensetzen läßt und uns eine Regel an die Hand giebt, vermittelst deren wir im Stande sind, alle in der Aufgabe begriffenen besondern Fälle aufzulösen.

Die Allgemeinheit der Regel, die das wörtliche Raisonnement herausbringt, entsteht daher, daß man darin keine besondere Zahl ausspricht, und folglich gehen die Zahlen während der Entwickelung unverändert von einem Wortausdrucke zum andern, da hingegen die Rechnung mittelst der bestimmten Zahlen nach und nach diese Zahlen verändert; und wenn man zum Endresultate kommt, so zeigt nichts an, auf welche Art die Zahl 2 aus den gegebenen Zahlen 9 und 5 gebildet worden ist, denn die Zahl 2 kann man durch unendlich mannigfaltige Rechnungsoperationen erhalten.

§. 3. Diese Schwierigkeiten werden vermieden, wenn man die **zu theilende Zahl** und den **gegebenen Ueberschuß** durch Symbole vorstellt, die unabhängig von jedem besondern Werth sind, und mit denen man selbst keine Rechnung ausführen kann. Die Buchstaben sind sehr geeignet, solche Zeichen abzugeben, und mittelst ihrer würde die Aufgabe folgendergestalt ausgedrückt werden können:

Es soll eine bekannte durch *a* vorgestellte Zahl in zwei Theile getheilt werden, so daß der größere

Theil um einen angegebenen durch b bezeichneten Ueberschuß größer sei als der kleinere Theil.

Man bezeichne wieder den kleineren mit x,

so wird der größere ausgedrückt durch $x + b$;

ihre Summe oder die zu theilende Zahl wird gleich sein $x + b + x$, oder $2x + b$.

Die erste Bedingung der Aufgabe wird also geben

$$2x + b = a.$$

Jetzt ist sichtbar, daß man zu dem Doppelten von x oder zu $2x$ die Größe b setzen müsse, um die Größe a zu machen, und hieraus folgt, daß man a um b vermindern müsse, um $2x$ zu bekommen, und daß folglich $2x = a - b$.

Hieraus schließt man, daß die Hälfte von $2x$ oder

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

Wird dieses letzte Resultat in die gewöhnliche Sprache übersetzt, indem man statt der darin enthaltenen Buchstaben und Zeichen die sie bezeichnenden Wörter und Phrasen substituirt, so ergiebt sich die eben gefundene Regel, nach welcher, **um den kleineren der gesuchten Theile zu erhalten, man von der Hälfte der zu theilenden Zahl oder von $\frac{a}{2}$ die Hälfte des gegebenen Ueberschusses oder $\frac{b}{2}$ abziehen muß.**

Ist der kleinere Theil bekannt, so wird man den größeren haben, indem man zu dem kleinern den gegebenen Ueberschuß hinzusetzt. Diese Bemerkung ist hinreichend, um die Auflösung der vorgelegten Aufgabe zu vollenden; aber die Algebra giebt mehr, sie bietet eine Regel, den größern Theil ohne Hülfe des kleinern zu berechnen, nämlich so: da $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ der Werth des kleinern ist, so wird dieser um den Ueberschuß b vermehrt, den größern Theil $= \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ geben; es sagt

aber $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$: nachdem man von a die Hälfte von b abgezogen habe, so müsse man zu dem Reste das ganze b oder zwei Hälften von b hinzusetzen, welches sich darauf reducirt, $\frac{a}{2}$ um die Hälfte von b oder um $\frac{b}{2}$ zu vermehren. Es ist hieraus einleuchtend, daß $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ sich reducirt auf $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; und wenn man diesen Ausdruck übersetzt, so wird man belehrt, daß der größere von den zwei gesuchten Theilen gleich ist der Hälfte der zu theilenden Zahl mehr der Hälfte des gegebenen Ueberschusses.

In der besondern Aufgabe, mit welcher ich mich zuerst beschäftiget habe, war die zu theilende Zahl 9, der Ueberschuß von einem Theil über den andern $= 5$; um sie durch die so eben gefundenen Regeln aufzulösen, so muß man mit 9 und 5 die mit a und b angezeigten Operationen ausführen.

Die Hälfte von 9 ist $\frac{9}{2}$ und die von 5 ist $\frac{5}{2}$, also der kleinere Theil =

$$\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2;$$

der größere Theil, =

$$\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

§. 4. Oben ist der kleinere von beiden Theilen durch x bezeichnet und hieraus der größere Theil abgeleitet. Wollte man hingegen diesen letzteren Theil unmittelbar suchen, so muß man wahrnehmen, daß, wenn man diesen Theil durch x bezeichnet, der andere $x - b$ sein wird, weil man von dem größern Theil zu dem kleinern übergeht, indem man den Ueberschuß des ersten über den zweiten abzieht; die zu theilende Zahl wird

alsdann ausgedrückt durch $x + x - b$ oder $2x - b$ und wäre also

$$2x - b = a.$$

Dieses Resultat zeigt, daß $2x$ die Größe a um die Größe b übertreffe, und daß folglich $2x = a + b$. Nimmt man von $2x$ und von der ihr gleichen Größe die Hälfte, um den Werth von x zu haben, so zieht man hieraus

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2},$$

welches, um den größern von den beiden gesuchten Theilen zu berechnen, dieselbe Regel wie oben giebt. Ich verweile nicht, den Ausdruck der kleinern hieraus abzuleiten.

Dieselbe Relation zwischen den gegebenen und den unbekannten Zahlen kann auf sehr verschiedene Arten ausgesagt werden; diejenige, welche zu der vorhergehenden Aufgabe geführt hat, ist, welche auch aus der folgenden Aussage entsteht:

Aus der bekannten Summe a von zwei Zahlen und ihrem Unterschiede b jede dieser Zahlen zu finden; denn in andern Worten ist die zu theilende Zahl gleich der Summe der zwei gesuchten Theile, und ihre Differenz ist der Ueberschuß des größern Theils über den kleinern. Diese Aenderung in den Worten der Aussage, auf die oben gefundenen Regeln angewandt, giebt:

Die kleinere der zwei gesuchten Zahlen ist gleich der halben Summe weniger der halben Differenz.

Die größere ist gleich der halben Summe plus der halben Differenz.

§. 5. Eine der vorigen ähnliche Aufgabe, aber etwas verwickelter, ist folgende:

Man soll eine gegebene Zahl in drei Theile so theilen, daß der Ueberschuß der mittlern über die klei-

nere gleich einer gegebenen Zahl sei, und der Ueberschuß der größern über die mittlere eine andere gegebene Zahl sei.

Um die Begriffe zu fixiren, will ich zuerst den gegebenen Zahlen bestimmte Werthe geben.

Ich nehme an, die zu theilende Zahl sei 230.

Der Ueberschuß des mittlern Theils über den kleinern sei 40.

Der Ueberschuß des größern Theils über den kleinern sei 60.

Bezeichnet man den kleinern mit x,

so wird der mittlere Theil gleich den kleinern plus 40 oder $= x + 40$ sein.

Und der größere wird gleich sein den mittlern plus 60 oder $= x + 40 + 60$; diese drei Theile müssen nun die zu theilende Zahl ausmachen, folglich

$$x + x + 40 + x + 40 + 60 = 230.$$

Vereinigt man einerseits die gegebenen Zahlen, und andererseits die unbekannten Zahlen, so wird sich x dreimal in dem Resultate finden; und um abzukürzen, schreibt man

$$3x + 140 = 230.$$

Und weil man zu dem Dreifachen von x noch 140 hinzusetzen muß, um 230 zu erhalten, so folgt hieraus, daß, wenn man 140 von 230 abzieht, man ganz genau das Dreifache von x haben werde, oder daß

$$3x = 230 - 140$$

oder daß

$$3x = 90;$$

und es folgt hieraus, daß $x = \frac{90}{3}$ oder $= 30$.

Addirt man 30 zu 40, dem Ueberschusse des mittlern über den kleineren Theil, so hat man 70 für den mittlern Theil.

Addirt man 70 zu 60, dem Ueberschusse des größern Theils über den mittlern, so wird man 130 für den größern Theil haben.

§. 6. Wären die bekannten Zahlen andre, als die, welche ich in der Aussage gesetzt habe, so könnte man doch die Aufgabe auflösen, indem man denselben Gang wie in dem vorhergehenden Paragraph befolgte; allein man müßte dann dieselben Raisonnements und alle die Rechnungen wieder machen, die daselbst gemacht wurden, um auf die Zahl 30 zu kommen, denn nichts zeigt, wie diese Zahl aus den gegebenen Zahlen 230, 40 und 60 entstehe. Um die Auflösung unabhängig von den besondern Werthen der Zahlen zu machen und zu zeigen, wie der Werth der unbekannten Größen sich mittelst der bekannten bilde, will ich die Aufgabe so vortragen:

Eine gegebene Zahl a soll in drei Theile so getheilt werden, daß der mittlere Theil um einen gegebenen Ueberschuß b größer als der kleinere Theil, und der größere Theil um den Ueberschuß c größer als der mittlere sei.

Bezeichnet man wie oben durch x die unbekannte Größe, und schreibt mittelst der eingeführten Zeichen und der Symbole a, b, c, welche die bekannten Größen der Aufgabe vorstellen, die vorher über die Zahlen gemachten Raisonnements, so wird man von neuem erhalten, daß

der kleinere Theil x,
der mittlere $x+b$,
der größere $x+b+c$;

und da diese drei Theile zusammen die zu theilende Zahl ausmachen, so muß sein

$$x+x+b+x+b+c=a.$$

Wie kurz auch dieser Ausdruck scheint, so kann er doch noch kürzer gemacht werden; denn da er zeigt, daß x dreimal in der zu theilenden Zahl und b zweimal vorkommt, so schreibe ich $3x$ statt $x+x+x$, und $+2b$ statt $+b+b$, alsdann kommt

$$3x+2b+c=a.$$

Dieser letzte Ausdruck zeigt, daß man zu dem Dreifachen der durch x vorgestellten Zahl das Doppelte der durch b

vorgestellten Zahl und noch die Zahl c setzen muß, um die Zahl a zu bilden; es folgt hieraus, daß wenn man von der Zahl a das Zweifache der Zahl b abzieht und noch die Zahl c, man sodann grade das Dreifache von x haben wird, oder daß

$$3x = a - 2b - c;$$

da nun x ein Drittel von dreimal x oder von $3x$ ist, so schließt man hieraus, daß

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}$$

Da ich den durch a, b, c vorgestellten Zahlen keinen besondern Werth beigelegt habe, so giebt auch das Resultat, zu welchem ich gekommen bin, ebenfalls keinen Werth für x. Es zeigt nur an, welche Rechnungs-Operationen man mit diesen Zahlen machen muß, wenn man ihnen einen Werth ertheilt, um den Werth der unbekannten hieraus abzuleiten.

In der That kann der Ausdruck $\frac{a - 2b - c}{3}$, der gleich x ist, in die gewöhnliche Sprache übersetzt werden, wenn man an die Stelle der Buchstaben die Benennungen der Zahlen, welche sie vorstellen, schreibt, und statt der Zeichen die in Worten ausgedrückten Operationen, welche sie anzeigen. Auf diese Art wird man die folgende Phrase bilden:

Von der zu theilenden Zahl ziehe den doppelten Ueberschuß des mittlern Theils über den kleineren ab und auch noch den Ueberschuß des größern Theils über den mittlern und nimm von dem Reste den dritten Theil.

Befolgt man diese Phrase buchstäblich, so bestimmt man durch die ersten Operationen der Arithmetik den kleineren Theil. Wäre z. B. die zu theilende Zahl 230, die Ueberschüsse 40 und 60, wie im vorhergehenden §., so zieht man von 230, zweimal 40 oder 80 und 60 ab, und so bleibt 90, wovon der dritte Theil 30 ist, wie bereits gefunden worden.

Wären die zu theilende Zahl 520, die Ueberschüsse 50 und 120, so müßte man von 520 zweimal 50, oder 100

und 120 abziehen; es würde alsdann 300 übrig bleiben, davon der dritte Theil oder 100 der kleinste Theil wäre; die beiden andern Theile würde man bilden, indem man 50 und 100 zusammen nimmt, welches 150 macht; dazu noch 120, welches 270 giebt. Die drei verlangten Theile würden also sein

100, 150, 270,

deren Summe gleich 520 ist, wie die Aufgabe verlangt.

Weil die algebraischen Resultate öfters nichts weiter als die Anzeigung der mit den Zahlen auszuführenden Rechnungs-Operationen sind, um daraus andere zu finden, so hat man sie allgemein **Formeln** genannt.

Obgleich diese Aufgabe verwickelter als in §. 1 ist, so kann sie doch noch durch bloßes Raisonnement aufgelöst werden. In dem hier beigefügten Tableau findet sich dieses Raisonnement in Worten und grade gegenüber die Uebersetzung in algebraische Zeichen. Eine aufmerksame Prüfung dieses Tableaus wird jeden Zweifel über die Nützlichkeit der Algebra und über die Umstände ihrer Entstehung tilgen.

Aufgabe: Es soll eine gegebene Zahl in drei Theile dergestalt getheilt werden, daß der mittlere Theil um einen gegebenen Ueberschuß größer werde als der kleinste Theil; auch soll der größte Theil um einen auch gegebenen Ueberschuß größer werden als der mittlere Theil.

Auflösung: Durch Vernunftschlüsse in der gewöhnlichen Wortsprache.

Der mittlere Theil wird gleich sein dem kleinsten Theile, wenn man zu diesem den Ueberschuß des mittlern über den kleinsten Theil setzt.

Der größte Theil wird gleich sein dem mittleren Theile, wenn man zu diesem den Ueberschuß des größten über den mittleren Theil setzt.

Da diese drei Theile die zu theilende Zahl ausmachen, so wird diese zu theilende Zahl bestehen: aus dem kleinsten Theile und nochmals aus dem kleinsten Theile und dem Ueberschusse zwischen dem kleinsten und mittleren Theile; wozu noch kommt der kleinste Theil, der Ueberschuß des kleinsten und mittleren Theiles und der Ueberschuß des größten Theiles über den mittlern.

Demnach wird die gegebene Zahl bestehen: aus dem kleinsten Theil dreimal genommen, aus dem Ueberschuß des kleinsten und mittlern Theiles zweimal genommen, und aus dem Ueberschuß des größten und mittlern Theiles.

Da aber zu dem dreifachen kleinsten noch der doppelte Ueberschuß des mittlern und kleinsten nebst dem Ueberschusse des größten und mittlern Theiles muß gesetzt werden, um die zu theilende Zahl zu erhalten, so folgt, daß diese zu theilende Zahl um den einen gedachten doppelten und den andern einfachen Ueberschuß größer sei als der dreifache kleinste Theil; und daher auch der dreifache kleinste Theil gleich sei der zu theilenden Zahl, wenn man die eben gedachten Ueberschüsse von ihr abzieht.

Folglich ist der kleinste Theil ein Drittel von dem großen um die gedachten beiden Ueberschüsse verminderten Theile.

Nach der algebraischen Schreibart.

Es sei die gegebene Zahl bezeichnet mit a; der Ueberschuß der mittlern über die kleinste Zahl sei b; der Ueberschuß der größten Zahl über die mittlere sei c; die kleinste Zahl sei durch x bezeichnet.

Der mittlere ist $x+b$.

Der größte Theil ist $x+b+c$.

Folglich $x+x+b+x+b+c=a$;

dieses giebt gehörig abgekürzt:

$$3x+2b+c=a$$

oder $3x=a-2b-c$;

daher endlich $x=\frac{a-2b-c}{3}$.

§. 7. Die in §. 2 angenommenen Zeichen sind nicht die einzigen, deren man sich in der Algebra bedient; neue Betrachtungen werden in der Folge neue einführen. Man sieht auch schon, daß in §. 2 die Multiplication von x mit 2 und in §. 5 und 6 die von x mit 3, die von b mit 2 dadurch angezeigt werden, daß man diese Zahl bloß vor den Buchstaben x und b gesetzt hat, ohne Zwischensetzung eines Zeichens, und so wird auch fernerhin verfahren werden; dergestalt, daß jede linker Hand eines Buchstabens gesetzte Zahl ein Multiplicator der durch diesen Buchstaben vorgestellten Zahl sein wird. $5x$, $5a$, u. s. w. bezeichnen 3 mal x, 5 mal a, u. s. w., $\frac{3}{4}x$ oder $\frac{3x}{4}$ u. s. w. bezeichnen $\frac{3}{4}$ von x oder dreimal x dividirt durch 4, u. s. w.

Ueberhaupt wird künftig die Multiplication sich dadurch anzeigen, daß man die Faktoren, ohne ein Zeichen dazwischen zu setzen, einen neben den andern setzt, so oft daraus keine Verwirrung entsteht.

Die Ausdrücke ax, bc, u. s. w. werden also gleichgeltend sein mit $a \times x$, $b \times c$; u. s. w. bei Zahlen kann man das Zeichen × nicht weglassen, denn der Ausdruck 3×5, dessen Werth 15 ist, wird alsdann durch Weglassung des Zeichens 35, und würde also die Bedeutung gänzlich ändern. In diesem Falle setzt man oft einen Punkt statt des Zeichens × und schreibt 3. 5.

Von den Gleichungen.

§. 8. Wenn man mit Aufmerksamkeit die Auflösung der Aufgabe in §. 3 und 6 prüft, so wird man finden, daß sie aus zwei sehr zu unterscheidenden Theilen bestehe. In dem ersten Theile drückt man die Relationen, welche die Aussage der Aufgabe zwischen den bekannten und den unbekannten Größen aufstellt, mittelst der algebraischen Zeichen

aus, und dieses führt zu der Bezeichnung von Gleichheit zweier algebr. Ausdrücke, nämlich:

In §. 3 die Größen $2x+b$ und a,

In §. 6 die Größen $3x+2b+c$ und a.

Aus dieser Gleichheit wurde dann eine Reihe von Schlüssen gezogen, die endlich dahin führten, die unbekannte Größe x gleich einem Verein gegebener Größen zu setzen, die unter sich durch Operationen verbunden sind, die man auszuführen versteht: dieses ist der zweite Theil der Auflösung.

Die hier so eben angegebenen zwei Theile finden sich fast in allen zum Gebiete der Algebra gehörigen Aufgaben. Es ist wenigstens am Anfange des Unterrichts schwer, eine Vorschrift zu ertheilen, nach welcher man den ersten Theil, der zum Gegenstand die Uebersetzung der Bedingungen der Aufgabe in algebraischen Zeichen hat, auszuüben. Man muß, wenn es gelingen soll, sich mit der algebr. Zeichenschrift vertraut machen und sich eine Fertigkeit erwerben, die Aussage einer Aufgabe in allen ihren Umständen, sie mögen deutlich oder versteckt darin liegen, zu zerlegen. Ist man dann einmal dahin gekommen, zwei gleiche algebr. Ausdrücke zwischen den in der Frage vorgekommenen, bekannten sowohl als unbekannten Zahlen zu bilden, so giebt es alsdann methodische Verfahrungsarten, um aus diesem algebr. Ausdruck den Werth der unbekannten Größen abzuleiten, welches der Gegenstand des zweiten Theils der Auflösung ist. Ehe ich diese Theile zur nähern Kenntniß bringen kann, muß ich erst noch einige Benennungen erklären, deren sich die Algebraisten zu diesem Behuf bedienen.

Eine **Gleichung** ist die Gleichheit zweier Größen.

Die Theile einer Größe, die zusammen auf einer Seite des Gleichheitszeichens (=) stehen, machen eine **Seite** oder eine **Hälfte** der Gleichung aus; also hat jede Gleichung zwei **Seiten** oder zwei **Hälften**.

Der Theil linker Hand des Gleichheitszeichens heißt die **erste Hälfte** der Theil rechter Hand die **zweite Hälfte**.

In der Gleichung $2x+b=a$ ist $2x+b$ die erste Hälfte und a ist die zweite Hälfte.

Die durch die Zeichen + und — von einander abgesonderten Größen, die zusammen eine Hälfte der Gleichung ausmachen, werden Glieder genannt.

In der Gleichung $2x+b=a$ enthält also die erste Hälfte zwei Glieder, nämlich: $2x$ und $+b$.

Die Gleichung $\frac{3}{4}x+7=8x-12$ hat in jeder Hälfte zwei Glieder, nämlich:

$\frac{3}{4}x$ und $+7$ in der ersten,

$8x$ und -12 in der zweiten.

Ob schon die Gleichung $\frac{3}{4}x+7=8x-12$, nur als Beispiel genommen und von ohngefähr gebildet worden zu sein scheint, so kann sie doch, wie alle übrigen in der Folge, angesehen werden, als käme sie von einer Aufgabe her, in welcher man die Bedingungen in die algebr. Sprache übersetzt habe. Die in Rede stehende wird so übersetzt:

Man soll eine Zahl x finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man $\frac{3}{4}$ von x noch zu 7 hinzusetzt, die Summe gleich 8 mal x weniger 12 sei.

Eben so entspricht die Gleichung $ax+bc-cx=ac-bx$, in welchen die Buchstaben a, b, c, bekannte Größen vorstellen sollen, der folgenden Aufgabe:

Es soll eine Zahl x gefunden werden, aus der man, wenn man sie mit einer gegebenen Zahl a multiplicirt, hierzu das Product von zwei gegebenen b und c addirt, dann aber das Product aus c und x abgezogen wird, ein Resultat erhalte, welches dem Producte von a und c vermindert um das Product aus b und x gleich sei.

Nur durch viele Uebung, Aufgaben aus der gewöhnlichen Wortsprache in die algebraische Schrift zu übersetzen, und umgekehrt diese in jene zu übertragen, wird man mit der Algebra vertraut, deren Schwierigkeit meistens darin besteht,

steht, sich eine vollkommene Kenntniß von den algebr. Zeichen und ihrem Gebrauche zu erwerben.

Eine Gleichung auflösen, heißt: aus einer Gleichung den Werth der unbekannten ziehen, oder dahin kommen, daß diese unbekannte allein auf einer Seite, und auf der andern Seite des Gleichheitszeichen ganz bekannte Größen stehen.

Die verschiedenen Aufgaben, welche gemacht werden können, führen auf mehr oder weniger zusammengesetzte Gleichungen; man hat diese in mehrere Classen oder Grade abgetheilt. Zuerst werde ich mich mit den Gleichungen vom ersten Grade beschäftigen. So nennt man die Gleichungen, in welchen die unbekannten Größen niemals mit sich selbst noch unter sich multiplicirt sind.

Von Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade, worin nur eine einzige unbekannte Größe vorkommt.

§. 9.

Wir haben schon gesehen, daß, eine Gleichung auflösen, heißt: zu einem Ausdruck kommen, in welchem die unbekannte Größe allein auf einer Seite der Gleichung gleich gesetzt sei bekannten Größen, die unter sich durch Operationen, die man auszuführen versteht, verbunden sind. Es folgt hieraus, daß, um eine Gleichung bis dahin zu bringen, man die unbekannte von allen bekannten Größen, mit welchen sie sich verbunden findet, befreien muß. Es kann aber die unbekannte Größe mit den bekannten Größen auf dreierlei Arten verbunden sein:

1) Durch Addition und Subtraction, wie in den Gleichungen

$$x+5=9-x,$$

$$a+x=b-x;$$

2) durch Addition, Subtraction und Multiplication, wie in den Gleichungen

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$
$$ax - b = cx + d;$$

3) endlich durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division, wie in den Gleichungen

$$\frac{5x}{3} + 8 = \frac{11}{12}x + 9,$$
$$\frac{ax}{b} + cx - d = \frac{mx}{n} + \frac{p}{q}.$$

Man befreiet die unbekannte von den addirten und subtrahirten bekannten Größen, indem man sie alle auf einer Seite der Gleichung sammlet; und deshalb muß man wissen, wie man ein Glied von einer Seite der Gleichung auf die andere schaffen kann.

§. 10.

Z. B. in der Gleichung

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$

muß man das Glied $4x$ aus der zweiten Hälfte nach der ersten hin versetzen und das Glied -5 aus der ersten Hälfte in die zweite. Deshalb muß man bemerken, daß, wenn man $+4x$ in der zweiten Hälfte wegstreicht, man sie um die Größe $4x$ vermindert, und daß man eben so viel von der ersten Hälfte abziehen muß, um die Gleichheit zwischen beiden Hälften der Gleichung zu erhalten; man schreibt also $-4x$ in der ersten Hälfte, welche nun wird $7x - 5 - 4x$; und hat

$$7x - 5 - 4x = 12.$$

In der ersten Hälfte -5 auslöschen, heißt die angezeigte Subtraction von 5 Einheiten unterlassen; diese Hälfte wird also dadurch um 5 Einheiten vermehrt; man muß daher, um die Gleichheit zu erhalten, auch die zweite Hälfte um 5 Einheiten vermehren, oder $+5$ in dieser Hälfte schreiben: sie wird $12 + 5$, und man hat

$$7x - 4x = 12 + 5.$$

Führt man die angezeigten Operationen aus, so erscheint die Gleichung

$$3x = 17.$$

Durch diese Vernunftschlüsse, die man auf jedes beliebige Beispiel anwenden kann, ist sichtbar, daß wenn man auf der einen Seite der Gleichung ein mit + behaftetes Glied ausstreicht, welches also diese Seite vermehrte, so muß man dieses Glied von der andern Seite subtrahiren oder es dort mit dem Zeichen — schreiben; im Gegentheil, wenn das Glied, welches man weglöscht, das Zeichen — hat, so muß man die andere Seite um dieses Glied vermehren oder es mit dem Zeichen + schreiben, weil es die Seite, in welcher es war, verminderte.

Hieraus folgert man diese allgemeine Regel:

Um ein Glied aus einer Hälfte einer Gleichung in die andere zu bringen, muß man es aus der Hälfte, worin es sich befindet, weglassen und in die andere Hälfte mit einem Zeichen schreiben, welches dem vorher gehabten entgegengesetzt ist.

Um diese Regel auszuüben, muß man darauf achten, daß das erste Glied in jeder Hälfte, wenn gar kein Zeichen vorsteht, angenommen wird, als habe es das Zeichen +. Bringt man also in der Buchstaben-Gleichung $ax - b = cx + d$ das Glied cx aus der zweiten Hälfte in die erste, so hat man

$$ax - b - cx = d;$$

versetzt man nachgehends das Glied $-b$ aus der ersten Hälfte in die zweite, so kommt

$$ax - cx = d + b.$$

§. 11.

Vermittelst der vorhergehenden Regel kann man sogleich auf einer Seite alle mit der unbekannten Größe behafteten Glieder vereinigen und auf der andern Seite alle bekannten Größen; und unter dieser Gestalt kann die Seite, in welcher sich die unbekannte findet, immer in zwei Factoren

zerlegt werden, von welchen der eine nur gegebene Größen und der andere die unbekannte allein enthält.

Diese Vereinfachung bietet sich jedesmal von selbst dar, wenn die vorgelegte Gleichung numerisch ist und sie keine Brüche enthält, weil alsdann alle mit der unbekannten behafteten Glieder sich zu einem reduciren. Hätte man z. B. $10x+7x-2x=25+7$ und führt auf jeder Seite die angezeigten Operationen aus, so fände man successive

$$17x-2x=32,$$

$$15x=32;$$

und da $15x$ sich in zwei Factoren 15 und x zerlegt, so ergiebt sich der unbekannte Factor x, wenn man durch den gegebenen Factor 15 die Zahl 32 (gleich dem Product $15x$) dividirt. Es kommt

$$x=\frac{32}{15}.$$

Die Zerlegung geschieht auf dieselbe Art in den Buchstaben-Gleichungen, die ähnlich

$$ax=bc$$

sind, weil das Glied ax unmittelbar das Product von a mit x bezeichnet. Man schließt hieraus

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Es sei jetzt die Gleichung

$$ax-bx+cx=ac-bc,$$

welche drei mit der unbekannten Größe behaftete Glieder enthält. Weil ax, bx, cx die respectiven Producte von x und den Größen a, b, c vorstellen, so giebt der Ausdruck $ax-bx+cx$, in die gewöhnliche Sprache übersetzt, folgende Phrase:

Von x, so viel mal genommen als Einheiten in a sind, ziehe so viel mal x ab, als in b Einheiten sind, und setze zu dem Resultate dieselbe Größe x so viel mal genommen als Einheiten in c sind.

Hieraus folgt, daß die unbekannte Grß. im Ganzen so viel mal genommen ist, als sich Einheiten in der um c vermehrten Differenz der Zahlen a und b befinden, d. h. so viel mal, als es die Zahl $a-b+c$ anzeigt. Die zwei Factoren der ersten Hälfte sind folglich $a-b+c$ und x. Man hat also

$$x=\frac{ac-bc}{a-b+c}.$$

Dieses auf jedes andere Beispiel anwendbare Raisonnement zeigt, daß, nachdem alle Glieder, welche die unbekannte enthalten, auf einer Seite vereinigt sind, alsdann der Factor, welcher diese unbekannte multiplicirt, gebildet wird aus allen mit ihren Zeichen gesammleten Größen, die die unbekannte einzeln multipliciren; und man erhält die unbekannte, indem man die ganz bekannte Seite mit dem gedachten Factor dividirt.

Nach dieser Regel giebt die Gleichung $ax-3x=bc$

$$x=\frac{bc}{a-3}.$$

Eben so führt die Gleichung $x+ax=c-d$ zu

$$x=\frac{c-d}{1+a};$$

denn da die Größe x allein steht, so kann sie angesehen werden, als sei sie in 1 multiplicirt. Uebrigens sieht man, daß in $x+ax$ die unbekannte x sich einmal mehr als in ax befindet und ist folglich in $1+a$ multiplicirt.

§. 12.

Es ist sichtbar, daß, wenn alle Glieder der Gleichung einen gemeinschaftlichen Factor enthielten, man diesen Factor weglassen könnte, ohne deshalb die Gleichheit aufzuheben, weil man nichts weiter thäte, als alle Theile der zwei gleich groß angenommenen Größen mit einerlei Zahl zu dividiren.

Es sei z. B. die Gleichung

$$6abx - 9bcd = 12bdx + 15abc.$$

Ich bemerke sogleich, daß die Zahlen 6, 9, 12 und 15 durch 3 theilbar sind; und wenn ich diesen Factor weglasse, so thue ich nichts weiter, als daß ich von allen Größen, welche die Gleichung bilden, den dritten Theil nehme; nach dieser Reduction hätte ich

$$2abx - 3bcd = 4bdx + 5abc.$$

Nachgehends bemerke ich, daß die Buchstabengröße b, welche in jedem Gliede durch Multiplication verbunden ist, einen allen diesen Gliedern gemeinschaftlichen Factor anzeigt; ich werde ihn also auch weglassen, und es kommt

$$2ax - 3cd = 4dx + 5ac.$$

Wenden wir die Regeln aus §. 10 und 11 auf diese letzte Gleichung an, so ziehe ich daraus nach und nach

$$2ax - 4dx = 5ac + 3cd,$$

$$x = \frac{5ac + 3cd}{2a - 4d}.$$

§. 13.

Ich gehe jetzt zu den Gleichungen über, deren Glieder Divisoren haben. Man könnte auf sie unmittelbar die vorhergehenden Regeln anwenden, so oft die unbekannte nicht in den Nennern vorkömmt; es ist aber noch viel einfacher, alle Glieder auf einerlei Nenner zu bringen, welchen man nachher weglassen kann.

Es sei z. B. die Gleichung

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}.$$

Die Arithmetik giebt die Regeln, um Brüche auf einerlei Nenner zu bringen, und um Ganze in Brüche von gegebener Art zu verwandeln (Arithm. 69, 67), und durch diese Regeln verwandle ich alle Glieder der gegebenen Gleichung in Brüche von einerlei Nenner.

Machen wir mit den Brüchen

$$\frac{2x}{3}, \quad \frac{4x}{5}, \quad \frac{5x}{7}$$

den Anfang, so verwandle ich sie nach der ersten der citirten Regeln in

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7}, \quad \frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7}, \quad \frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7};$$

um nun die Ganzen 4 und 12 in Brüche zu verwandeln, so darf man sie nur durch den gemeinschaftlichen Nenner der Brüche multipliciren, nämlich mit $3\times5\times7$, und man wird haben

$$3\times5\times7\times4, \qquad 3\times5\times7\times12.$$

Nun diese Glieder in die vorgelegte Gleichung eingesetzt, so wird sie

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times4}{3\times5\times7}$$

$$=\frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times12}{3\times5\times7}-\frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7};$$

und man könnte hier den Nenner weglassen, weil dadurch weiter nichts geschähe, als daß alle ihre Theile durch diesen Nenner multiplicirt werden (Arithm. 54.), welches die Gleichheit nicht stört. Nach dieser Weglassung kommt

$$5\times7\times2x+3\times5\times7\times4$$

$$=3\times7\times4x+3\times5\times7\times12-3\times5\times5x$$

oder $$70x+420=84x+1260-75x,$$

eine Gleichung ohne Nenner, aus welcher man den Werth von x durch die vorhergehenden Regeln zieht.

Die Ansicht des obigen Resultats und selbst die bloße Anwendung der citirten arithmetischen Regeln zeigen uns deutlich, daß in der Operation, worauf es hier ankommt, **der Zähler eines jeden Bruchs mit dem Producte der Nenner aller übrigen Brüche und die Ganzen durch das Product aller Nenner multiplicirt werden müssen, und daß man den gemeinschaftlichen Nenner der ent-**

stehenden Brüche gar nicht in Rechnung zu bringen hat.

Die Gleichung $70x+420=84x+1260-75x$ wird nach und nach

$$70x+75x-84x=1260-420,$$

$$61x=840,$$

$$x=\frac{840}{61}=13\frac{47}{61}.$$

Dasselbe Verfahren findet auch bei Buchstaben Statt, mit der Bemerkung, daß man alsdann die Multiplication nur anzeigen kann, die, wenn von Zahlen die Rede ist, ausgeführt wird.

Es sei z. B. die Gleichung

$$\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{e}+\frac{fg}{h};$$

so leitet man daraus ab

$$eh\times ax-beh\times c=bh\times dx+be\times fg,$$

ein Resultat, welches man einfacher schreiben kann, wenn man, dem gemäß, was §. 7. angenommen worden, die Factoren eines jeden Products, ohne Zwischensetzung eines Zeichens, den einen neben den andern setzt und die Multiplicatoren alphabetisch ordnet, welches das Aussprechen und die Uebersicht der Buchstaben erleichtert. Es kommt

$$aehx-bceh=bdhx+befg,$$

woraus man schließt

$$aehx-bdhx=befg+bceh,$$

$$x=\frac{befg+bceh}{aeh-bdh}.$$

§. 14.

Ob man gleich keine allgemeine und bestimmte Regel angeben kann, um die Gleichung von irgend einer Aufgabe bilden zu können, so giebt es doch eine Vorschrift, die, richtig verstanden, immer zum vorgesetzten Ziele führt, und diese heißt:

Man drücke durch algebr. Zeichen, die man den in der Aufgabe vorkommenden bekannten durch Zahlen oder Buchstaben und den immer durch Buchst. vorgestellten unbekannten Größen vorsetzt, die Raisonnements und die Operationen aus, die man ausführen müßte, um die Werthe der unbekannten zu prüfen, wenn sie gegeben wären.

Um davon Gebrauch zu machen, so muß man zuerst mit Sorgfalt die Operationen bestimmen, welche der Vortrag der Aufgabe deutlich oder versteckt enthält; aber hierin besteht gerade die Schwierigkeit, eine vorgelegte Aufgabe in eine Gleichung zu bringen.

Hier einige Beispiele, um die Anwendung der obigen Vorschrift zu zeigen. Die beiden ersten wähle ich aus den in der Arithmetik gelösten, um die Leichtigkeit zu zeigen, welche die algebraische Schreibart in die Entwicklung der Aussagen bringt.

1) Es seien zwei Springbrunnen, von welchen der erste allein in $2\frac{1}{2}$ Stunden einen Wasserbehälter füllt, und der zweite denselben Behälter allein in $3\frac{3}{4}$ Stunden füllt; in welcher Zeit würden beide Springbrunnen, wenn sie zugleich fließen, den Behälter füllen?

Wäre diese Zeit gegeben, so würde man die Probe so machen, daß man die Wassermenge berechnete, die jeder Springbrunnen gegeben hat, und beide Resultate zusammen müßten die ganze Wassermenge geben, welche der Behälter fassen kann.

Um die Gleichung zu bilden, bezeichnet man die unbekannte Zeit mit x und führt mit x die eben ausgesprochenen Operationen aus; um aber die Auflösung von den gegebenen Zahlen unabhängig zu machen und selbst die Ausdrücke von den in der Aussage, welche gebrochene Zahlen sind, zu verkürzen, stellt man sie auch durch Buchstaben vor; man

könnte schreiben a statt $2\frac{1}{2}$ Stunden, und b statt $3\frac{3}{4}$ Stunden.

Nimmt man nun, wie in der Arithmetik, den Inhalt des Wasserbehälters als Einheit an, so sieht man, daß

der erste Springbrunnen, der ihn allein in a Stunden füllt, in einer Stunde eine durch den Bruch $\frac{1}{a}$ angegebene Wassermenge hineinfließen läßt und daß er folglich in x Stunden die Wassermenge $x \times \frac{1}{a}$ oder $\frac{x}{a}$ liefert (Arithm. 53.)

Der zweite Springbrunnen, welcher den nämlichen Wasserbehälter in b Stunden füllt, gießt in 1 Stunde eine durch den Bruch $\frac{1}{b}$ angegebene Wassermenge hinein; und folglich in x Stunden liefert er die Menge $x \times \frac{1}{b}$ oder $\frac{x}{b}$.

Die ganze durch beide Springbrunnen in x Stunden gelieferte Wassermenge wird also sein

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b};$$

und da diese Wassermenge gleich der sein soll, welche der Wasserbehälter enthält, und diese als Einheit angenommen worden, so hat man endlich die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Diese Gleichung, nach den vorhergehenden Regeln behandelt, führt zu

$$bx + ax = ab,$$

$$x = \frac{ab}{b+a}.$$

Die letzte Formel giebt, um alle Fälle der vorgelegten Aufgabe aufzulösen, folgende sehr einfache Regel:

Man dividire das Product aus den beiden Zahlen, welche die Stunden angeben, während welcher jeder Springbrunnen allein den Behälter füllte, durch die Summe dieser zwei Zahlen, so giebt der Quotient die

Zeit, den Behälter zu füllen, wenn beide Springbrunnen zugleich fließen.

Wendet man diese Regel auf die Zahlen der Aussage an, so hat man

$$2\tfrac{1}{2} \times 3\tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{2} \times \tfrac{15}{4} = \tfrac{75}{8},$$

$$2\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{15}{4} = \tfrac{20}{8} + \tfrac{30}{8} = \tfrac{50}{8},$$

woraus

$$x = \tfrac{75}{50} = \tfrac{3}{2}.$$

2) Es sei a eine in drei Theile zu theilende Zahl, welche sich unter sich verhalten wie die gegebenen Zahlen m, n und p.

Es ist sichtbar, daß die Probe von der Aufg., wie folgt, gemacht wird.

Bezeichnet man den ersten Theil durch x, so hätte man

$$m : n :: x : \text{dem 2ten Theile} = \frac{nx}{m} \text{ (Arithm. 116.)},$$

$$m : p :: x : \text{dem 3ten Theile} = \frac{px}{m};$$

vereinigt man die drei Theile, so müßte man die zu theilende Zahl finden; man wird also die Gleichung haben

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a.$$

Reducirt man alle ihre Glieder auf den Nenner m, so wird sie

$$mx + nx + px = am,$$

und zieht hieraus

$$x = \frac{am}{m + n + p}.$$

Dieses Resultat ist nichts weiter, als die algebraische Uebersetzung von der Gesellschaftsrechnung (Arithm. 124); denn sieht man die Zahlen m, n, p, so an, als bezeichneten sie die Einlagen der Kaufleute, so ist $m+n+p$ die ganze Einlage, a der zu vertheilende Gewinn, und der Ausdruck $x = \frac{ma}{m+n+p}$ zeigt, daß der eine Theil erhalten wird,

wenn man die correspondirende Einlage durch den ganzen Gewinn multiplicirt und das Product durch die Summe der Einlage dividirt, welches übereinstimmt mit der Proportion:

die ganze Einlage : einer besonderen Einlage
= der ganze Gewinn : dem besonderen Gewinn.

§. 15.

Die Bildung der Gleichung der folgenden Aufgabe erfordert besondere Bemerkungen, die bisher noch nicht vorgekommen sind.

Ein Fischer versprach, um seinen Sohn zu ermuntern, ihm 5 Centimen für jeden Zug mit dem Netze, worin er Fische hätte, zu geben; dagegen sollte der Sohn dem Vater für jeden leeren Zug 3 Centimen geben. Nach 12 Zügen war der Vater dem Sohn 28 Centimen schuldig. Wie viel Züge mit Fischen hat der Sohn gemacht?

Stellt man die Anzahl dieser glücklichen Fischzüge durch x vor, so wird die Zahl der leeren Züge $12 - x$ sein; und wenn diese Zahlen gegeben wären, so würden sie geprüft, wenn man die erste durch 5 Cent. multiplicirt, um dasjenige zu erhalten, was der Vater dem Sohne geben muß, und 3 Cent. durch die zweite, um dasjenige zu haben, was der Sohn dem Vater zustellen muß; die erste Zahl sollte die zweite um 28 Cent., die der Vater dem Sohne schuldig ist, übertreffen.

Für die erste Zahl hätte man x mal 5 Cent. oder $5x$. In Betreff der zweiten Zahl zeigt sich eine Schwierigkeit: wie ist das Product von 3 durch $12 - x$ zu erhalten? Hätte man statt x eine gegebene Zahl, so würde man die angezeigte Subtraction sogleich ausführen, alsdann multiplicirte man den Rest durch 3; für jetzt ist es aber nicht möglich, und man muß die Multiplication vor der Subtraction

auszuführen suchen, und wenigstens das Resultat zu einem Verein von algebraischen Gliedern bringen, die denjenigen ähnlich sind, welche die Gleichungen enthalten, die wir auflösen können.

Bei einiger Aufmerksamkeit leuchtet es ein, daß wenn man die Zahl 3 12 mal nimmt, so nimmt man 3 so viel mal zu viel, als Einheiten in der Zahl x sind, um welche man vorläufig den Multiplicator 12 hätte vermindern sollen, so daß das wahre Product sein wird

$$36 \text{ weniger } 3 \text{ mal } x \text{ oder } 3x$$

oder

$$36 - 3x.$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht prüfen, wenn man x Zahlenwerthe giebt. Wäre z. B. $x=8$, so hätte man 3 $12-8$ mal zu nehmen, und wenn man -8 mal wegließe, so setzte man im Resultate 8 mal die Zahl 3 zu viel; das wahre Product wird also sein

$$3\times12-3\times8=36-24=12.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem, welches man erhält, wenn sogleich 8 von 12 abgezogen wird; denn alsdann ist

$$12-8=4 \quad \text{und} \quad 3\times4=12.$$

Nach dieser Erläuterung ist begreiflich: weil das Geld, welches der Vater dem Sohn schuldig, ausgedrückt ist durch $5x$ und weil das, was der Sohn seinem Vater schuldig, ausgedrückt ist durch $36-3x$, so muß die zweite Zahl, von der ersten abgezogen, den Rest 28 geben; hier ist aber wieder eine neue Schwierigkeit: Wie ist $36-3x$ abzuziehen von $5x$, ohne vorher $3x$ von 36 abgezogen zu haben?

Man weicht dieser Schwierigkeit aus, wenn man bemerkt, daß wenn das Glied $-3x$ unbeachtet bliebe, und es würde von $5x$ die Zahl 36 ganz abgezogen, so hätte man nothwendig $3x$ zu viel abgezogen, weil dieser Abzug von $5x$ nur geschehen sollte, nachdem vorher 36 um $3x$ vermindert worden. Der Unterschied $5x-36$ muß also um $3x$ vermehrt werden, um die Größe zu bilden, die übrig bleiben

muß, nachdem man von $5x$ die durch $36-3x$ ausgedrückte Zahl abgezogen hat; diese Größe wird also sein

$$5x-36+3x;$$

und man hat die Gleichung

$$5x-36+3x=28;$$

welche nach und nach wird

$$8x-36=28,$$
$$8x=28+36,$$
$$8x=64,$$
$$x=\tfrac{64}{8}=8.$$

Es waren also 8 glückliche und 4 leere Züge gemacht worden.

In der That, 8 Züge zu 5 Cent. geben 40 Cent.

4 Züge zu 3 — geben 12 —

Unterschied . . . . . 28 Cent.,

wie es die Aussage der Aufgabe verlangt.

Wöllte man die Auflösung allgemein machen, so würde man durch a die Summe vorstellen, die der Vater seinem Sohn für jeden glücklichen Zug giebt, und durch b, was der Sohn dem Vater für jeden leeren Zug geben muß, durch c alle Züge zusammen, und durch d das, was der Vater seinem Sohn nach dieser Anzahl Züge schuldig geworden. Es sei wieder x die Zahl der glücklichen Züge, so ist $c-x$ die der leeren Züge; jeder Zug der ersten Art bringt dem Sohn a ein, x Züge bringen ihm also $a\times x$ oder ax ein und die leeren Züge bringen dem Vater b mal $c-x$ ein.

Das Raisonnement, nach welchem man die Theile gefunden hat, aus welchen das Product von 3 durch $12-x$ sich zusammensetzt, wird eben so bei dem allgemeinen Fall angewendet. Läßt man zuerst $-x$ weg, um das Product bc aus b und aus c ganz zu bilden, so wird b $x$mal zu viel genommen, und folglich ist $bc-bx$ das wahre Product.

Um dieses Product von ax abzuziehen, muß man auch hier wie in dem Zahlenbeispiele bemerken, daß, wenn man

die Größe bc ganz abzöge, man die Größe bx, um welche die erste zuerst vermindert werden sollte, zu viel abgezogen hätte; und daß daher der wahre Rest nicht bloß $ax-bc$, sondern $ax-bc+bx$ sein muß.

Da diese Summe gleich d sein soll, so wird die Gleichung der Aufgabe sein

$$ax-bc+bx=d,$$

und wird geben

$$ax+bx=d+bc,$$

$$x=\frac{d+bc}{a+b}.$$

Da diese allgemeine Formel die Operationen anzeigt, welche mit den gegebenen Zahlen a, b, c, d gemacht werden müssen, um die unbekannte x zu erhalten, so kann man sie in eine Regel übersetzen, oder auch in die Stelle der Buchstaben a, b, c, d, die gegebenen Zahlen setzen; das letzte Verfahren ist dasjenige, welches man das **Substituiren** der gegebenen Werthe nennt oder die **Formel in Zahlen umsetzen.** Wendet man hier die im obigen Beispiele an, so komme

$$x=\frac{28+3\times 12}{5+3};$$

und wenn die angezeigten Operationen ausgeführt werden, so hat man, wie oben,

$$x=\frac{28+36}{8}=\frac{64}{8}=8.$$

Methoden, die Rechnungen durch Buchstaben, so weit es möglich, zu vollziehen.

§. 16.

Die vorige Aufgabe zeigt, daß man in gewissen Fällen die mit Summen oder Differenzen von mehreren Größen angezeigte Multiplication in partielle Multiplicationen zerlegen muß; und in §. 11. ist gerade das Gegentheil ge-

schehen, indem man die Größe $ax - bx + cx$, welche das Resultat von mehreren mit Addition und Subtraction begleiteten Multiplicationen vorstellt, in die beiden Factoren $a - b + c$ und x zerlegt hat, die nur eine bloße Multiplication mit vorhergegangener Addition und Subtraction anzeigen. Die in diesen beiden Umständen gemachten Raisonnements können in Regeln gebracht werden, und es gehen daraus, für die durch Buchstaben vorgestellten Größen Operationen hervor, die man algebraische Multiplication und Division genannt hat, der Analogie wegen, welche sie mit den arithmetischen Operationen gleiches Namens haben.

Der nämlichen Analogie zufolge hat man zwei algebraische Operationen erdacht, die Addition und Subtraction genannt werden, deren Zweck darin besteht, mehrere algebraische Ausdrücke in einen einzigen zu vereinigen, oder sie von einander abzuziehen; aber diese Operationen, so wie die vorhergehenden, weichen von denen in der Arithmetik darin ab, daß ihre Resultate meistens nur Andeutungen von auszuführenden Operationen sind, und also nur eine Transformation (Umwandlung) von ursprünglich angezeigten Operation enin andere sind, die dasselbe bewirken. Es geschieht nur, entweder daß man die Ausdrücke vereinfacht, oder daß man ihnen eine Form giebt, die geeignet ist, die zu erfüllenden Bedingungen zu offenbaren.

Um diese Operationen zu erklären, nennt man monomische (eingliedrige oder einnamige) Größen solche, die nur ein Glied haben, wie $+2a$, $-3ab$, u. s. w.; binomische (zweigliedrige oder zweinamige) solche, die zwei Glieder haben, wie $a+b$, $a-b$, $5a-2x$ u. s. w.; trinomische (dreigliedrige oder dreinamige) solche, die drei Glieder haben, quadrinomische (viergliedrige oder viernamige solche, die vier Glieder haben, und allgemein polynomische (vielgliedrige oder vielnamige) solche Größen, die aus mehreren Gliedern bestehen. Es ist gut, zu bemerken,

daß

daß man die monomischen Größen auch **incomplexe** und die polynomischen **complexe** nennt.

Von der Addition der algebraischen Größen.

§. 17.

Die Addition der monomischen Größen geschieht, wenn man sie mit ihrem Zeichen + verbindet; daß b zu a addirt werden soll, zeigt man also durch $a+b$ an. Sollen aber mehrere algebraische Ausdrücke zusammen addirt werden, so ist auch zugleich der Zweck, das Resultat zu vereinfachen, indem man es durch die Vereinigung von mehreren seiner Glieder zu einem Gliede auf die kleinste Anzahl von Gliedern reducirt.

Diese Vereinigung ist die, die in §. 2 und 5 ausgeführt ist, als man die Größe $x+x$ zu $2x$, die Größe $x+x+x$ zu $3x$ reducirte. Sie kann nur bei Größen, die durch einerlei Buchstaben ausgedrückt sind, Statt finden, weshalb man sie **ähnliche** Größen nennt. Man sieht die Buchstabengröße als eine, eine gewisse Anzahlmale wiederholte Einheit an; so können die Größen $2a$ und $3a$, als zwei und drei Einheiten von besonderer Art betrachtet, durch ihre Addition $5a$ oder 5 Einheiten derselben Art bilden. Eben so $4ab$ und $5ab$ bilden $9ab$.

In diesem Falle verrichtet man die Addition nur mit den den Buchstaben vorstehenden Ziffern, welche anzeigen, wie oft sie wiederholt sind. Diese Ziffern heißen **Coefficienten.** Der Coefficient ist also der Multiplicator von der Größe, vor welche er gesetzt ist, und man muß, wenn er nicht geschrieben ist, sich erinnern, daß er gleich 1 ist; denn $1a$ ist dasselbe als a.

§. 18.

Sollen beliebige Größen, wie

$$4a+5b \quad \text{und} \quad 2c+3d$$

vereinigt werden, so muß das Ganze augenscheinlich aus allen Theilen zusammen genommen bestehen; man muß also schreiben

$$4a+5b+2c+3d.$$

Hätte man im Gegentheil

$$4a+5b \quad \text{und} \quad 2c-3d,$$

so müßte man in der Summe die Größe $3d$ mit dem Zeichen — schreiben oder als subtractiv anzeigen, weil, da sie von $2c$ abgezogen werden soll, nothwendigerweise die vorgelegte Summe um eben so viel vermindern muß; und man hätte

$$4a+5b+2c-3d.$$

Diese zwei Beispiele zeigen, daß die algebr. Addit. der Polynomen geschiehet, wenn man die zu addirenden Größen mit ihren Vorzeichen eine neben die andere schreibt und bemerkt, daß die Glieder ohne Vorzeichen mit dem Zeichen + gedacht werden.

Die obige Operation ist eigentlich nichts weiter als eine Anzeige, durch welche die Vereinigung von zwei complexen Größen auf die Addition und Subtraction einer gewissen Anzahl monomischer Größen zurückgeführt ist; wenn aber die zu addirenden Ausdrücke ähnliche Glieder enthielten, so könnte man diese Glieder vereinigen, indem man unmittelbar mit ihren Coefficienten operirte.

Es seien z. B. die Ausdrücke

$$4a+9b-2c,$$
$$2a-3c+4d,$$
$$7b+c-e;$$

nach der vorhergehenden Regel wird die Summe sein

$$4a+9b-2c+2a-3c+4d+7b+c-e.$$

Da aber die Glieder $4a$ und $+2a$ aus ähnlichen Größen bestehen, so lassen sie sich in ein Glied $6a$ vereinigen.

Eben so die Glieder $+9b+7b$ geben $16b$.

Die Glieder $-2c$ und $-3c$, beide subtractiv, bewirken in dem Resultat dasselbe als die Subtraction einer ihrer

Summe gleichen Größe, d. h. so viel als die Subtraction von $5c$; und da, wegen des Gliedes $+c$, einerseits c zu addiren ist, so bleibt nur $4c$ zu subtrahiren.

Die Summe der vorgelegten Ausdrücke wird also zurückgeführt auf

$$6a+16b-4c+4d-e.$$

§. 19.

Die letzte ausgeführte Operation, durch welche man alle ähnlichen Glieder in ein einziges vereiniget, welche Zeichen sie auch immer haben mögen, wird die Reduction genannt. Sie wird ausgeführt, wenn man die Summe von den mit dem Vorzeichen + und von den ähnlichen mit dem Vorzeichen — behafteten Größen macht, nachgehends die kleinere von beiden Summen von der größeren abzieht, und dem Reste das Zeichen der größern giebt.

Zu bemerken ist, daß die Reduction sich bei allen algebraischen Operationen anwenden läßt.

Hier einige Additionsbeispiele mit ihrem Resultat zur Uebung des Lesers.

1. Es seien die Größen zu addiren

$7m+3n-14p+17r$
$3a+9n-11m+2r$
$5p-4m+8n$
$11n-2b-m-r+s$

Resultat $=7m+3n-14p+17r+3a+9n-11m+2r$
$+5p-4m+8n+11n-2b-m-r+s.$

Wird die Reduction gemacht, so verwandelt sich diese Größe in:

$$-9m+31n-9p+18r+3a-2b+s$$

oder in $31n-9m-9p+18r+3a-2b+s.$

2. Die Größen zu addiren

$$11bc+4ad-8ac+5cd$$
$$8ac+7bc-2ad+4mn$$
$$2cd-3ab+5ac+an$$
$$9an-2bc-2ad+5cd$$

Resultat $11bc+4ad-8ac+5cd+8ac+7bc-2ad+4mn+2cd-3ab+5ac+an+9an-2bc-2ad+5cd.$

Reduciren wir diese Größe, so wird sie

$$16bc+5ac+12cd+4mn-3ab+10an.$$

Von der Subtraction der algebraischen Größen.

§. 20.

Die Subtraction der Monomen wird, wie man übereingekommen ist, angezeigt, indem man das Zeichen — zwischen die zu subtrahirende und die Größe, von der man sie subtrahiren soll, setzt.

b von a subtrahirt schreibt man $a-b$.

Sind die Größen ähnlich, so wird die Subtraction unmittelbar mit den Coefficienten geschehen.

Wenn $3a$ von $5a$ zu subtrahiren, so kommt als Rest $2a$.

In Betreff der Subtraction der Polynomen muß man zwei Fälle unterscheiden. 1) Wenn alle Glieder der zu subtrahirenden Größe das Zeichen + haben, so muß man ihnen offenbar das Zeichen — geben, weil man successive alle Theile von der zu subtrahirenden Größe abziehen soll.

Wenn man z. B. von $5a-9b+2c$ abziehen will $2d+3e+4f$, so muß man schreiben

$$5a-9b+2c-2d-3e-4f.$$

2) Wenn die zu subtrahirende Größe Glieder mit dem Zeichen — hat, so muß man ihnen das Zeichen + geben. Denn wenn man von a abziehen wollte $b-c$ und man schriebe zuerst $a-b$, so hätte man also a um die ganze

Größe b vermindert; es sollte aber die Subtraction nicht eher geschehen, als nachdem vorher b um c vermindert worden. Man hat also diese letztere Größe zu viel abgezogen, die man folglich wieder mit dem Zeichen + ersetzen muß, welches als wahres Resultat geben wird

$$a - b + c.$$

Dies Raisonnement, welches man auf alle ähnliche Fälle anwenden kann, zeigt, daß das Zeichen — vor c in + hat verwandelt werden müssen; und nähert man dieses Resultat dem vorhergehenden, so wird man schließen: die Subtraction der algebraischen Größen wird verrichtet, wenn man zu dem Minuendus die Größe des Subtrahendus mit entgegengesetztem Zeichen setzt.

Hat man das Resultat, welches die obige Regel giebt, geschrieben, so macht man, wenn es Statt findet, nach der Vorschrift von §. 19. Reductionen, wie solches in den folgenden Beispielen zu sehen:

1) Von $17a + 2m - 9b - 4c + 23d$

die Größe... $51a - 27b + 11c - 4d.$

Resultat..... $17a + 2m - 9b - 4c + 23d$

$$- 51a + 27b - 11c + 4d.$$

Nach gemachter Reduction wird diese Größe =

$$- 34a + 2m + 18b - 15c + 27d$$

oder auch

$$2m - 34a + 18b - 15c + 27d.$$

2) Von $5ac - 8ab + 9bc - 4am$ zu subtrahiren

die Größe... $8am - 2ab + 11ac - 7cd$

Resultat..... $5ac - 8ab + 9bc - 4am$

$$- 8am + 2ab - 11ac + 7cd.$$

Die Reduction ausgeführt, so kommt

$$- 6ac - 6ab + 9bc - 12am + 7cd$$

oder $9bc - 6ac - 6ab - 12am + 7cd.$

Von der Multiplication algebraischer Größen.

§. 21.

So lange man sich unter den Buchstaben nur die numerischen Werthe von Größen denkt, deren Stelle sie einnehmen, so ist der Begriff von der algebraischen Multiplication derselbe wie in der Arithmetik (Arithm. 21, 74). **a durch b multiplicirt, heißt also, aus der durch a vorgestellten Größe eine andere Größe auf dieselbe Weise zusammensetzen, als die durch b vorgestellte Größe es aus der Einheit ist.**

Schon in §. 2. und 7. lehrte man die Zeichen kennen, worin man übereingekommen war, die Multiplication anzuzeigen, und das Product von a mit b würde folglich geschrieben werden $a \times b$ oder $a.b$ oder endlich ab.

Man hat oft nöthig, mehrere successive Multiplicationen anzuzeigen, wie die von a mit b, dann von dem Product ab mit c, dann von diesem letzten Producte mit d, und so fort. In diesem Falle ist es einleuchtend, daß das Endresultat eine Zahl ist, deren **Factoren** die Zahlen a, b, c, d (Arithm. 22.); und wenn man die zuletzt oben erwähnte Uebereinkunft verallgemeinert, so zeigt man dieses Product an, indem man ohne irgend eine Zwischensetzung von Zeichen die Factoren, woraus es gebildet ist, neben einander hinschreibt. Auf diese Weise hat man den Ausdruck $abcd$.

Umgekehrt stellt jeder Ausdruck, wie $abcd$, der aus mehreren unmittelbar neben einander geschriebenen Buchstaben gebildet ist, immer das Product der durch diese Buchstaben vorgestellten Zahlen war.

Von diesen Conventionen habe ich schon stillschweigend Gebrauch gemacht, und sind in ihnen auch die Zahlencoefficienten begriffen, weil sie augenscheinlich Factoren der gegebenen Größe sind. In der That, da $15abcd$ anzeigt, daß

die Größe $abcd$ 15 mal genommen sei, so drückt sie auch das Product der fünf Factoren 15, a, b, c, d aus.

§. 22.

Hieraus folgt, daß, um die Multiplication von mehreren Monomen wie $4abc$, $5def$, $3mn$ anzudeuten, man die Größen neben einander ohne Zwischenzeichen schreiben müsse, und es wird sodann geben

$$4abc5def3mn;$$

da man aber in der Arithm. §. 82. gezeigt hat, daß man die Ordnung der Factoren und Producte nach Belieben verändern darf, ohne den Werth dieses Products zu ändern, so benutzt man diesen Umstand, um die Zahlenfactoren zu nähern, deren Multipl. nach Regeln der Arithmetik ausgeführt werden kann. Man denkt sich also das Produkt als in der Ordnung $4 \cdot 5 \cdot 3abcdefmn$ angezeigt; und nun die Multiplication der Zahlen 4, 5, 3 ausgeführt, so hat man bloß

$$60abcdefmn \text{ *).}$$

§. 23.

Die Producte, worin gleiche Factoren vorkommen, werden sehr abgekürzt. Statt den Buchstaben, der einen dieser Factoren vorstellt, mehreremale neben einander zu schreiben, so setzt man ihn nur einmal und zeigt durch eine Zahl an, wie oft er als Factor hätte geschrieben werden solen; da aber diese Zahl successive Multiplicationen anzeigt, so muß sie sorgfältig von dem Coefficienten unterschieden werden, der nur Additionen anzeigt; deshalb setzt

---

*) Der Gebrauch der algebraischen Zeichen verkürzet den Beweis dieses Satzes sehr; deshalb folgt er hier mittelst dieser Zeichen.

Schreibt man das Product $abcdef$, wie folgt: $abc \times de \times f$ und ändert die Ordnung der beiden Factoren des Products de, um ed zu haben (Arithm. 27.), so entsteht $abc \times ed \times f$ oder $abcedf$. Es ist einleuchtend, daß man durch neue Zerlegungen jede beliebige Veränderung in der Ordnung der Factoren des gegebenen Products herbeiführen kann.

man sie zur Rechten und ein wenig über dem Buchstaben, indeß der Coefficient immer zur Linken des Buchstaben und in derselben Linie geschrieben ist.

Nach dieser angenommenen Bezeichnung wird das Prod. von a mit a, welches nach §. 21. durch aa angezeigt wäre, nun a^2. Die obere 2 zeigt an, daß die durch a bezeichnete Zahl in dem gegebenen Ausdruck zweimal Factor und also nicht mit $2a$ zu verwechseln ist, welches nur eine Abkürzung von $a+a$ ist. Um den Fehler recht bemerklich zu machen, den man begehen würde, wenn man das eine für das andere nähme, so reicht es hin, Zahlen statt der Buchstaben zu setzen. Hätte man z. B. $a=5$, so wird $2a=2\times5=10$ und $a^2=a\times a=5\times5=25$.

Fährt man so fort, so muß man ein Product, worin a drei mal als Factor ist, schreiben a^3 statt aaa; eben so statt a^5 ein Product, in welchem a fünfmal Factor ist oder gleichgeltend mit $aaaaa$.

§. 24.

Die so durch successive Multiplicationen einer Größe gebildeten Producte werden im Allgemeinen **Potenzen** von dieser Größe genannt.

Die Größe selbst oder a wird die **erste Potenz** genannt.

Die mit sich selbst multiplicirte Größe oder aa oder auch a^2 ist die **zweite Potenz**, die man auch das **Quadrat** nennt.

Die zweimal hinter einander mit sich selbst multiplicirte Größe oder aaa oder auch a^3 ist die **dritte Potenz**, die man auch **Cubus** nennt *).

Ueberhaupt wird eine beliebige Potenz durch die Anzahl

---

*) Die Benennungen **Quadrat**, **Cubus**, hangen von geometrischen Betrachtungen ab und unterbrechen die Gleichförmigkeit in der Aufzählung der durch gleiche Factoren gebildeten Producte und sind daher in der Algebra nicht zweckmäßig; man gebraucht sie aber ihrer Kürze wegen häufig.

ihrer gleichen Factoren, aus denen sie gebildet wird, angegeben: a^5 oder auch $aaaaa$ ist die fünfte Potenz von a.

Um die Anwendung von diesen Benennungen zu zeigen, werde ich die Zahl 3 nehmen und werde haben

1ste Potenz 3
2te ..... $3 \cdot 3 = 9$
3te ..... $3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$
4te ..... $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \cdot 3 = 81$
5te ..... $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243$
u. s. w.

Die Zahl, welche die Potenz einer andern Zahl angiebt, heißt **Exponent** dieser Zahl.

Wenn der Exponent gleich 1 ist, so wird er nicht geschrieben: a ist einerlei mit a^1.

Aus dem Vorhergehenden sieht man, daß, **um von einer Zahl eine Potenz zu machen, man diese Zahl mit sich selbst einmal weniger multipl. müsse als Einheiten in dem Exponenten der Potenz sind.**

§. 25.

Weil der Exponent die Anzahl von gleichen Factoren anzeigt, welche den Ausdruck, davon er ein Theil ist, bilden, und das Product von zwei Größen alle Fact. haben muß, die in jeder dieser Größen vorkommen, so folgt hieraus, daß der Ausdruck a^5, in welchem a 5 mal Factor, mit dem Ausdruck a^3 multiplicirt, in welchem a 3 mal Factor, ein Product geben muß, in welchem a 8 mal Fact., folglich durch a^8 ausgedrückt wird, und daß allgemein **das Prod. aus zwei Potenzen von einerlei Zahl zum Exponenten die Summe von dem des Multiplicandus und des Multiplicators haben muß.**

§. 26.

Hieraus folgt, daß **wenn zwei Monomen gemeinschaftliche Buchst. haben, so kann man den Ausdruck**

von dem Producte dieser Grß. abkürzen, indem man sofort die Exponenten der ähnlichen Buchst. des Multiplicandus und des Multiplicators addirt.

Z. B. der Ausdruck vom Producte der Größe a^2b^3c und $a^4b^5c^2d$ wird $a^2b^3ca^4b^5c^2d$ sein und kürzt sich nach dem in §. 21. Angenommenen ab, indem man die durch einerlei Buchst. bezeichneten Fact. sammlet, welches giebt

$$a^2\,a^4\,b^3\,b^5\,c\,c^2\,d,$$

woraus man schließt

$$a^6\,b^8\,c^3\,d,$$

indem man schreibt

a^6 statt a^2a^4

b^8 statt b^3b^5

c^3 statt cc^2 oder c^1c^2.

§. 27.

So wie man die Potenzen durch die Anzahl der gleichen Factoren, woraus sie gebildet sind, unterscheidet, so classificirt man auch die beliebigen Producte nach der Anzahl der **einfachen** oder **Prim**-Factoren, die sie bilden; und ich werde diesen Classen den Namen **Grade** geben. Das Prod. a^2b^3c wird z. B. vom 6ten Grade sein, weil es 6 einfache Factoren enthält, nämlich 2 Fact. a, 3 Fact. b und 1 Fact. c. Es ist einleuchtend, daß die Factoren a, b und c, hier als Primfactoren betrachtet, es nur in der Algebra sein können, die ihre Zerlegung nicht erlaubt; übrigens können sie zusammengesetzte Zahlen vorstellen. Hier ist nur von ihrem allgemeinen Zustande die Rede *).

*) Als eine Folge von der in der Note S. 40 angezeigten Analogie nennt man gewöhnlich Dimension, was ich Grade nenne. Der oben beigebrachte Ausdruck hätte in der gewöhnlichen Sprache 6 Dimensionen. Dieses Beispiel erweist die Absurdität der alten Aufzählung, die sich darauf gründet, daß die Prod. aus 2 oder 3 Factoren die Inhalte der Flächen und der Körper ausmessen, die zwei oder drei Dimensionen haben; denn über diese Zahl hinaus hört das Correspondiren zwischen den algebraischen Ausdrücken und den geometrischen Figuren auf, weil der Raum nicht mehr als drei Ausdehnungen haben kann.

Die in Zahlen ausgedrückten Coeff. kommen in der Schätzung des Grades der algebr. Grß. nicht in Rechnung; man sieht nur auf die Buchst.

Es ist einleuchtend (§. 21. 25.), daß wenn man zwei Monomen mit einander multiplirirt, so ist die Zahl, welche den Grad des Products anzeigt, die Summe von denen, die den Grad von jedem dieser Monomen anzeigt.

§. 28.

Die Multiplication der complexen Größen wird auf die der Monomen zurückgeführt, indem man jedes Glied des Multiplicandus und des Multiplicators besonders betrachtet, wie man in der Arithm. mit jeder Ziffer der Zahlen, die man multipliciren will, besonders verfährt (**Arithm.** 33); die Vereinigung der partiellen Prod. macht das Totalprod. aus; aber die Algebra bietet einen Umstand dar, der sich bei den Zahlen nicht findet. Diese haben keine zu subtrahirenden oder keine sudtractiven Theile; die Einheiten, Zehner, Hunderte u. s. w., die sie bilden, werden immer als unter sich addirt gedacht, und alsdann ist es wohl einleuchtend, daß das Totalprod. sich bilden muß aus der Summe der Prod. von jedem Theile des Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicators.

Eben so verhält es sich, wenn von Buchstabenausdrücken die Rede ist, deren Glieder alle durch das Zeichen + gesammlet sind.

Das Product von $a+b$

multiplicire mit c,

ist $= ac+bc$

und wird erhalten, indem man jeden Theil des Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicators multiplicirt, und die beiden partiellen Prod. ac und bc addirt. Wenn der Multiplicandus mehr als zwei Theile enthielte, so wäre das Verfahren immer das nämliche.

Wenn der Multiplicator die Summe von mehreren

Gliedern ist, so ist sichtbar, daß das Product sich zusammensetzt aus der Summe der Prod. des Multiplicandus mit jedem Gliede des Multiplicators.

Das Product von $a+b$

multiplicirt mit $c+d$

ist $\left\{\begin{array}{r} ac+bc \\ +ad+bd; \end{array}\right.$

denn wenn man zuerst $a+b$ mit c multiplicirt, so erhält man $ac+bc$, nachgehends $a+b$ mit dem zweiten Gliede d des Multiplicators, so giebt dieses $ad+bd$, und die Summe dieser zwei Resultate giebt $ac+bc+ad+bd$ als Totalproduct.

§. 29.

Wenn der Multiplicandus subtractive Theile enthält, so müssen die Producte aus diesen Theilen mit dem Multiplicator von den andern abgezogen werden, d. h. sie müssen das Zeichen — bekommen. Z. B.

das Product von $a-b$

multipl. mit c

ist $ac-bc;$

denn so oft man ganz die Grß. a nimmt, die um b hätte vermindert werden sollen, so nimmt man die Grß. b zu viel; das Prod. ac, in welchem a ganz und so viel mal genommen ist, als die Zahl c anzeigt, übertrifft folglich das gesuchte Prod. um die Grß. b, so viel mal genommen als die Zahl c anzeigt, oder um das Prod. bc; man müßte also abziehen bc von ac, welches geben würde, wie oben,

$ac-bc.$

Dieselben Vernunftschlüsse finden bei jedem subtractiven Theil des Multiplicandus Statt, welches auch immer ihre Anzahl sein mag und aus wie vielen Gliedern der Multiplicandus auch bestehen mag, wenn nur alle Glieder das Zeichen + haben. Dabei denken wir uns die Glieder, die kein Zeichen haben, mit dem Zeichen +. Diese Beispiele zeigen, daß die

Glieder des Multiplicandus, die das Zeichen + haben, ein Partialproduct mit dem Zeichen + geben, indessen die mit dem Zeichen — ein Prod. mit dem Zeichen — geben. Hieraus folgt, daß **wenn der partielle Multiplicator das Zeichen + hat, so hat das partielle Prod. mit dem Multiplicandus gleiche Zeichen.**

§. 30.

Das Gegentheil findet Statt, wenn der Multiplicator subtractive Theile enthält; die durch diese Theile gebildeten Producte müssen das entgegengesetzte Zeichen von dem haben, welches sie nach der vorstehenden Regel haben müßten. Das folgende Beispiel wird davon überführen.

Es sei der Multiplicandus $a - b$,

der Multiplicator $\underline{c - d;}$

so wird das Product sein $\begin{cases} ac - bc \\ -ad + bd; \end{cases}$

denn das Product des Multiplicandus wird nach dem vorhergehenden Beispiele sein $ac - bc$; indem man c ganz als Multiplicator statt c um d vermindert nimmt, so nimmt man die Grß. $a - b$ so viel mal zu viel als es die Zahl d anzeigt. Das Product $ac - bc$ übertrifft also das gesuchte Prod. um das Prod. $a - b$ mit d. Dieses letztere ist nun nach dem, was vorhergeht, $ad - bd$; und um es von dem erstern abzuziehen, muß man darin die Zeichen ändern. Man wird also $ac - bc - ad + bd$ als das verlangte Resultat haben.

§. 31.

Aus der Gesammtheit der Schlußfolge aus den obigen Beispielen schließt man, daß die Multiplication der Polynomen geschiehet, indem man successive, nach den für die Monomen (§. 21 — 26) gegebenen Regeln alle Glieder des Multiplicandus mit jedem Gliede des Multiplicators multiplicirt und beobachtet, daß wenn der partielle Multiplicator das Zeichen + hat, das Partial-

prod. dasselbe Zeichen als der partielle Multiplicator haben muß und das entgegengesetzte Zeichen, wenn der partielle Multiplicator das Zeichen — hat.

Entwickelt man die verschiedenen Fälle von dieser letzten Regel, so wird man finden,

1) daß ein Glied mit dem Zeichen +, multipl. mit einem Gliede mit dem Zeichen +, ein Prod. mit dem Zeichen + giebt;

2) daß ein Glied mit dem Zeichen —, multipl. mit einem Gliede mit dem Zeichen +, ein Prod. mit dem Zeichen — giebt;

3) daß ein Glied mit dem Zeichen +, multipl. mit einem Gliede mit dem Zeichen +, ein Prod. mit dem Zeichen — giebt;

4) daß ein Glied mit dem Zeichen —, multipl. mit einem Gliede mit dem Zeichen —, ein Prod. mit dem Zeichen + giebt.

Dieses Tableau zeigt, daß **wenn der Multiplicandus und der partielle Multiplicator gleiche Zeichen haben, alsdann das Prod. das Zeichen + hat, und wenn sie verschiedene Zeichen haben, so hat das Prod. das Zeichen —.**

Um die Ausübung der Multipl. der Polynomen zu erleichtern, so folgt hier die Recapitulation der bei dieser Operation zu befolgenden Regeln.

1) **Nach der obigen Regel das Zeichen von jedem Partialproduct zu bestimmen:** heißt die Regel der Zeichen.

2) **Den Coefficienten bei dem Prod. aus denen des Multiplicandus und des partiellen Multiplicators zu bilden** (§. 22)**:** heißt die Regel der Coefficienten.

3) **Alle verschiedenen Buchstaben neben einander zu schreiben, die sich in dem Multiplicandus und in dem partiellen Multiplicator befinden** (§. 21)**:** heißt die Regel der Buchstaben.

4) Den Buchst., die dem Multiplicandus und dem partiellen Multiplicator gemein sind, einen Exponenten zu geben, der gleich der Summe von denen ist, welche sie in diesem Multiplicandus und in diesem Multiplicator haben (§. 25): heißt die Regel der Exponenten.

§. 32.

Das obige Beispiel bietet die Anwendung von allen diesen Regeln dar.

Multiplicandus $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

Multiplicator $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

Partielle Producte
$5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$
$-20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3$
$+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$

Reducirtes Product $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$

Die erste Zeile der partiellen Producte enthält die von allen Gliedern des Multiplicandus mit dem ersten Gliede a^3 des Multiplicators; da dieses Glied mit dem Zeichen + gedacht wird, so haben die hieraus entstehenden Prooucte dasselbe Zeichen als die correspondirenden Glieder des Multiplicandus (§. 31).

Da das erste Glied $5a^4$ des Multiplicandus das Zeichen + hat, so schreibt man das Zeichen des ersten Partialprod., welches auch + wäre, nicht; der Coeff. 5 von a^4 mit dem Coeff. 1 von a^3 multipl. giebt 5 als Coeff. des Partialprod.; die Summe der zwei Exponenten des Buchst. a ist 4+3 oder 7: das erste Partialprod. ist also $5a^7$.

Da das zweite Glied $-2a^3b$ des Multiplicandus das Zeichen — hat, so hat das Prod. das Zeichen —; der Coeff. 2 von a^3b, multipl. mit dem Coeff. 1 von a^3, giebt 2 als Coeff. des Prod.; der Exp. des Buchst. a, der beiden zu multiplicirenden Gliedern gemein ist, ist 3+3 oder 6, und man schreibt daneben den Buchstaben b, der sich nur in dem partiellen Multiplicandus befindet: das zweite Partialprod. ist also $-2a^6b$.

Das dritte Glied $+4a^2b^2$ giebt ein Partialproduct mit dem Zeichen +, welches man durch die auf die vorhergehenden zwei Glieder angewandten Regeln gleich $+4a^5b^2$ findet.

Die zweite Zeile enthält die Prod. von allen Gliedern des Multiplicandus mit dem zweiten Gliede $-4a^2b$ des Multiplicators; da dieser letztere das Zeichen — hat, so müssen alle Prod., welche er giebt, das entgegengesetzte Zeichen von dem der correspond. Glieder des Multiplicandus haben; die Coeff. der Buchst. und die Exponenten bilden sich wie in der vorhergehenden Zeile.

Endlich enthält die dritte Zeile die Prod. von allen Gliedern des Multiplicandus mit dem dritten Gliede $+2b^3$ des Multiplicators; da dieses Glied das Zeichen + hat, so haben alle Prod., die er giebt, dasselbe Zeichen als die correspondirenden Glieder des Multiplicandus.

Nachdem alle partiellen Prod., aus welchen das Totalprod. sich zusammensetzt, gebildet worden sind, so untersucht man mit Aufmerksamkeit dieses letztere, um zu sehen, ob es nicht ähnliche Glieder enthält. Enthält es deren, so reducirt man sie nach der Regel von §. 19, indem man beobachtet, daß zwei Glieder, um ähnlich zu sein, nicht allein dieselben Buchstaben enthalten, sondern auch noch gleiche Exponenten haben müssen. In dem obigen Beispiele sind drei Reductionen, nämlich:

$-2a^6b$ und $-20a^6b$, welches giebt $-22a^6b$;

$+4a^5b^2$ und $+8a^5b^2$, welches giebt $+12a^5b^2$;

$-16a^4b^3$ und $+10a^4b^3$, welches giebt $-6a^4b^3$.

Sind diese Reductionen ausgeführt, so hat man zum Resultate die letzte Zeile des Beispiels.

Hier folgt noch, um den Leser zu üben, ein Multiplicationsbeispiel, welches nach dem, was vorhergehet, leicht auszuführen ist.

Multiplicandus. $5a^4b^2 + 7a^3b^3 - 15a^5c + 23b^2d^4 - 17bc^3d^2 - 9abcdm^2$

Multiplicator. $11b^3 - 8c^3 + 5abc - 2bdm$

Partial-Producte.

$55a^4b^5 + 77a^3b^6 - 165a^5b^3c + 253b^5d^4 - 187b^4c^3d^2 - 99ab^4cdm^2$

$-40a^4b^2c^3 - 56a^3b^3c^3 + 120a^5c^4 - 184b^2c^3d^4 + 136bc^6d^2 + 72abc^4dm^2$

$+25a^5b^3c + 35a^4b^4c - 75a^6bc^2 + 115ab^3cd^4 - 85ab^2c^4d^2 - 45a^2b^2c^2dm^2$

$-10a^4b^3dm - 14a^3b^4dm + 30a^5bcdm - 46b^3d^5m + 34b^2c^3d^3m + 18ab^2cd^2m^3$

Vereinfachtes Resultat.

$55a^4b^5 + 77a^3b^6 - 140a^5b^3c + 253b^5d^4 - 187b^4c^3d^2 - 99ab^4cdm^2 - 40a^4b^2c^3 - 56a^3b^3c^3$

$+120a^5c^4 - 184b^2c^3d^4 + 136bc^6d^2 + 72abc^4dm^2 + 35a^4b^4c - 75a^6bc^2 + 115ab^3cd^4 - 85ab^2c^4d^2$

$-45a^2b^2c^2dm^2 - 10a^4b^3dm - 14a^3b^4dm + 30a^5bcdm - 46b^3d^5m + 34b^2c^3d^3m + 18ab^2cd^2m^3$

§. 33.

Das Verfahren der Multiplication zeigt, daß wenn alle Glieder des Multiplicandus von einerlei Grade sind (§. 27.) und daß die des Multiplicators auch von einerlei Grade sind, so werden alle Glieder des Prod. von einem Grade sein, welcher durch die Summe der Zahlen, die den Grad der Glieder von jedem der Factoren bezeichnen, angegeben wird.

Im ersten Beisp. ist der Multiplicandus vom vierten Grade, der Multiplicator vom dritten; das Prod. vom siebenten.

Im zweiten Beisp. ist der Multiplicandus vom sechsten, der Multiplicator vom dritten, das Prod. vom neunten Grade.

Die so eben in Erinnerung gebrachten Ausdrücke, deren Glieder alle von einerlei Grad sind, nennt man homogene (gleichartige) Ausdrücke. Die so eben über ihre Producte gemachte Bemerkung ist nützlich, um die Irrungen zu vermeiden, die man begehen kann, wenn man einige der Fact. in den partiellen Multiplicationen vergäße.

§. 34.

Indem die algebraischen Operationen mit den Buchstabengrößen zeigen, wie die verschiedenen Theile dieser Größen zur Bildung der Resultate beitragen, so lehren sie oft allgemeine Eigenschaften der Zahlen kennen, die von jedem Numerationssystem unabhängig sind. Die nachstehenden Multiplicationen führen zu sehr merkwürdigen Folgerungen dieser Art, die überdies in der Folge von häufigem Gebrauch sind.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

Die erste, aus welcher hervorgeht, daß die Grß. $a+b$ multipl. mit $a-b$ giebt a^2-b^2, zeigt, daß wenn man die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multipl., das Product in der Differenz der Quadrate dieser Zahlen bestehen wird.

Nimmt man z. B. die Summe 11 der Zahlen 7 und 4, multipl. diese mit der Differenz 3 dieser Zahlen, so wird das Prod. 3×11 oder 33 gleich der Differenz zwischen 49, Quadrat von 7, und 16, Quadrat von 4 sein.

Durch das zweite Beisp., in welchem $a+b$ zweimal Fact. ist, wird man belehrt, daß die zweite Potenz oder das Quadrat von einer aus zwei Theilen bestehenden Grß. a und b bestehe: 1) aus dem Quadrat des ersten Theils, 2) aus dem doppelten Prod. des ersten Theils in den zweiten und 3) aus dem Quadrat des zweiten Theils.

Das dritte Beisp., wo die zweite Potenz von $a+b$ mit der ersten multipl. wird, zeigt, daß die dritte Potenz oder der Kubus einer zweitheiligen Grß. enthalte: 1) den Kubus des ersten Theils, 2) das dreifache Prod. aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweiten, 3) das dreifache Prod. aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten Theils, endlich 4) den Kubus des zweiten Theils.

§. 35.

Es ist oft nöthig, eine Größe in ihre Factoren zu zerlegen und dadurch so viel wie möglich die Factoren recht kenntlich zu machen, aus denen die betrachteten Größen gebildet werden sollen, und man führt dagegen die algebr. Operat. nur dann aus, wenn es unumgänglich nöthig ist; und aus dieser Ursache muß man Zeichen aufstellen, die geeignet sind, die Multiplication zwischen complexen Größen anzuzeigen.

Man bedient sich in der That der Parenthesen oder Klammern, zwischen welche man die verschiedenen Fact. des angezeigten Prod. setzt. Z. B. der Ausdruck

$(5a^4 - 3a^2b^2 + b^4)$ $(4ab^2 - ac^2 + d^3)$ $(b^2 - c^2)$

zeigt das Prod. von den complexen Größen

$5a^4 - 3a^2b^2 + b^4$, $4ab^2 - ac^2 + d^3$ und $b^2 - c^2$ an.

Einige schon veraltete Schriftsteller bedienten sich der über den Fact. gesetzten Linien, wie hier unten zu sehen,

$$\overline{5a^4 - 3a^2b^2 + b^4} \times \overline{4ab^2 - ac^2 + d^3} \times \overline{b^2 - c^2};$$

da aber die Linien mehr oder weniger verlängert werden könnten als es sein muß, so sind diese Zeichen weniger prácis als die Klammern, die es niemals zweideutig lassen, welche Grß. zusammen in jedem Fact. vorkommen; auch haben sie den Vorzug erhalten.

Von der Division algebraischer Größen.

§. 36.

Die algebr. Division ist, wie die arithm., eine Rechnungsart, die den andern Fact. eines Products finden lehrt, wenn der eine Fact. nebst dem Prod. gegeben ist. Nach dieser Erklärung muß der Quotient, multipl. mit dem Divisor, den Dividendus wieder geben.

Indem man nun diese Vorbegriffe auf eintheilige Grß. anwendet, so wird man aus §. 21. sehen, daß der Dividendus aus den Fact. des Divisors und aus denen der Quotienten gebildet ist; folglich, **wenn man im Dividendus alle Fact. wegläßt, die den Divisor ausmachen, so wird der Quotient das gesuchte Resultat sein.**

Es sei z. B. das Monom $72a^5b^3c^2d$ zu dividiren mit dem Monom $9a^3bc^2$; so muß man, der obigen Regel gemäß, in der ersten von diesen Grß. die Fact. der zweiten weglassen, die respect. sind

$$9,\ a^3,\ b \text{ und } c^2;$$

soll die Division sich ausführen lassen, so müssen diese Fact. in dem Dividendus sein. Nimmt man sie, wie sie auf einander folgen, so sieht man sogleich, daß der Coeff. 9 des

Divisors ein Fact. vom Coeff. 72 des Dividendus ist oder daß 9 genau in 72 aufgehen muß; welches auch wirklich Statt hat, weil $72=9\times8$; läßt man also den Fact. 9 weg, so bleibt der Fact. 8 als Coeff. des Quotienten.

Aus den Regeln der Multipl. (§. 25) folgt noch, daß der Exponent 5 des Buchst. a im Dividendus die Summe der Exp. ist, die dieser Buchst. in dem Divisor und in dem Quot. hat; dieser letzte Exponent wird also die Differenz zwischen den beiden andern sein; oder $5-3=2$; der Buchst. a wird also in dem Quotienten den Exponenten 2 haben. Aus den nämlichen Gründen wird der Buchst. b in dem Quotienten einen Exp. gleich $3-1$ oder 2 haben. Endlich, da der Fact. c^2 dem Dividendus und dem Divisor gemein ist, so muß er weggelassen werden; und man wird folglich als verlangten Quotienten haben

$$8a^2b^2d.$$

Eben so würde man über jedes andere Beispiel raisonniren und aus dem Vorhergehenden schließen, daß, **um die Division der eintheiligen Grß. auszuführen, man den Coefficienten des Dividendus mit dem des Divisors dividiren müsse.**

Man muß im Dividendus die Buchst. weglassen, die er mit dem Divisor gemein hat, wenn sie denselben Exp. haben; und wenn der Exp. nicht derselbe ist, alsdann den Exp. des Divisors von dem des Dividendus abziehen; der Rest ist dann der Exp., welcher den Buchst. im Quotienten haben muß.

Endlich muß man in dem Quotienten die Buchst. des Dividendus schreiben, die nicht in dem Divisor sind.

§. 37.

Wendet man die oben gegebene Regel, um den Exp. der Buchst. des Quotienten zu bilden, an auf einen Buchst.,

der im Dividendus und im Divisor einerlei Exp. hat, so fände man, daß der Exp. im Quotienten Null sein müßte; z. B. a^3 dividirt durch a^3 gäbe a^0. Um zu wissen, was ein solcher Ausdruck bedeuten könnte, muß man zu seiner Entstehung zurückgehen und bedenken, daß, da er den Quotienten aus der Division der Größe a^3 durch sich selbst vorstellt, er der Einheit entsprechen muß, die anzeigt, wie viel mal eine beliebige Größe sich selbst enthält. Hieraus folgt, **daß der Ausdruck a^0 ein der Einheit äquivalentes Symbol ist, für welches man folglich 1 setzen kann.** Man braucht also die Buchstaben, deren Exponent Null, nicht zu schreiben, weil alsdann jeder von ihnen nur die Einheit vorstellt. Also, da $a^3 b c^2$ durch $a^2 b c^2$ dividirt, $a^1 b^0 c^0$ giebt, so ist dieser Quotient gleich a, wie man sich auch davon versichern kann, wenn man die dem Divid. und Divis. gemeinschaftlichen Fact. wegläßt.

Hieraus erhellet, daß dieser Satz: **Jede Grß., die Null zum Exponenten hat, gilt alsdann 1,** so zu sagen, nur eine Auslegung eines Resultats ist, zu welchem die übereingekommene Art, die Potenzen der Grß. durch die Exp. zu schreiben, führt.

Damit die Division sich ausführen läßt, darf 1) der Divis. keine Buchst. enthalten, die nicht im Divid. sind; 2) muß der Exp. der Buchst. in dem Divis. nicht den, den sie im Divid. haben, übertroffen; 3) endlich muß der Coeff. des Divis. in dem des Divid. aufgehen.

§. 38.

Wenn diese Bedingungen nicht Statt finden, so kann die Division, der Uebereinkunft in §. 2. gemäß, nur unter der Gestalt eines Bruchs angedeutet werden, und man muß nachgehends diesen Bruch zu vereinfachen suchen, indem man die dem Divid. und Divis. gemeinschaftlichen Factoren wegläßt, wenn solche vorhanden sind; denn (Arithm. 57) es ist

sichtbar, daß, da die Principien, auf welchen die Theorie der arithm. Brüche beruht, unabhängig von allen besondern Werthen ihrer Glieder sind, sie den durch Buchst. vorgestellten Brüchen eben so als den durch Zahlen vorgestellten Brüchen zukommen.

Nach diesen Principien läßt man zuerst weg die den Coeff. des Divid. und des Divis. gemeinschaftlichen Zahlenfact., dann die dem Divid. und dem Divis. gemeinschaftl. Buchst., welche zugleich in beiden einerlei Exp. haben. Wenn der Exp. nicht einerlei ist, so zieht man den kleinern von dem größern ab und giebt den Buchst. diesen Rest als Exp., schreibt aber diesen Exp. nur in dasjenige der beiden Glieder des Bruchs, in welchem der Buchst. den höchsten Exp. hatte.

Das folgende Beispiel wird diese Regel aufklären.

Es sei $48a^3b^5c^2d$ zu dividiren mit $64a^3b^3c^4e$; der Quotient kann nur unter der Bruchform

$$\frac{48a^3b^5c^2d}{64a^3b^3c^4e}$$

angezeigt werden; da aber die Coeff. 48 und 64 beide durch 16 theilbar sind, so kann man diesen gemeinsch. Fact. weglassen, der Coeff. des Zählers wird also 3 und der des Nenners 4. Da der Buchst. a den nämlichen Exponenten 3 in beiden Gliedern des Bruchs hat, so folgt hieraus, daß a^3 ein gemeinsch. Fact. im Divid. und Divis. ist, und man ihn auch weglassen kann.

Geht man nun zu dem Buchstaben b über, so muß man die höchste Potenz, die b^5 ist, durch b^3 nach der oben gegebenen Regel dividiren, und der Quotient b^2 lehrt uns, daß $b^5 = b^3 \times b^2$. Lassen wir also den gemeinsch. Fact. b^3 weg, so bleibt in dem Zähler der Fact. b^2.

In Betreff des Buchst. c ist im Nenner c^4 die höchste Potenz; dividirt man sie durch c^2, so zerlegt man sie in $c^2 \times c^2$; und wenn man den den beiden Gliedern gemeinsch.

Fact. c^2 wegläßt, so verschwindet dieser Buchst. im Zähler, bleibt aber im Nenner mit dem Exp. 2.

Endlich die Buchst. d und e bleiben in ihren respectiven Stellen, weil sie in ihrer Lage gar keinen Fact. anzeigen, der beiden Gliedern des Bruchs gemein wäre.

Durch diese verschiedenen Operationen reducirt sich der gegebene Bruch auf

$$\frac{3\,b^2\,d}{4\,c^2\,e};$$

dieses ist der einfachste Ausdruck, so lange man den Buchst. keinen Zahlenwerth giebt; denn er würde sich noch reduciren lassen, wenn man statt der Buchst. Zahlen setzt, die gemeinschaftliche Fact. enthalten.

§. 39.

Man vergesse nicht zu bemerken, daß, wenn alle Fact. des Dividendus im Divisor vorkommen, der überdem noch andere ihm besonders zugehörige Fact. enthält, man, nach Weglassung der ersten Fact., 1 in die Stelle des Dividendus im Zähler des Bruchs setzen muß. In diesem Falle kann man wirklich in beiden Gliedern des Bruchs alle Fact. des Zählers weglassen, d. h. die beiden Glieder des Bruchs durch den Zähler dividiren; aber dieser, durch sich selbst dividirt, muß 1 zum Quot. geben, aus welchem man den neuen Zähler machen muß.

Es sei z. B. der Bruch

$$\frac{4\,a^2\,b\,c}{12\,a^2\,b^3\,c\,d};$$

da die Fact. 12, a^2, b^3 und c sich respective mit den Fact. 4, a^2, b und c dividiren lassen, so ist dieses so viel, als wenn man die beiden Glieder des gegebenen Bruchs durch den Zähler $4\,a^2\,b\,c$ dividirt; aber die durch sich selbst dividirte Grß. $4\,a^2\,b\,c$ giebt 1 als Quot., und die Grß. $12\,a^2\,b^3\,c\,d$,

dividirt durch die erste, giebt, nach den obigen Regeln $3b^2d$; der neue Bruch ist also

$$\frac{1}{3b^2d}.$$

§. 40.

Aus den Regeln der Multipl. folgt, daß wenn man eine vieltheilige Grß. mit einer eintheiligen Grß. multiplicirt, so wird sie von allen Gliedern des Polynomens ein gemeinsch. Fact. Diese Bemerkung benutzt man, um Brüche zu vereinfachen, deren Zähler und Nenner Polynomen sind, die in allen ihren Gliedern gemeinsch. Fact. haben.

Es sei der Ausdruck

$$\frac{6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2}{9a^2b - 15a^2c + 24a^3};$$

untersucht man die Grß. $6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2$, so sieht man, daß der Fact. a^2 allen Gliedern gemein ist, weil $a^4 = a^2 . a^2$, und außerdem die Zahlen 6, 3 und 12 alle durch 3 theilbar sind, so daß

$$6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2 = 2a^2 . 3a^2 - bc . 3a^2 + 4c^2 . 3a^2.$$

Eben so hat der Nenner die Zahl $3a^2$ als gemeinsch. Fact.; denn die Fact. a^2 und 3 sind in allen Gliedern vorhanden, und man hat

$$9a^2b - 15a^2c + 24a^3 = 3b . 3a^2 - 5c . 3a^2 + 8a . 3a^2.$$

Lassen wir also den Fact. $3a^2$ sowohl im Zähler als im Nenner weg, so wird der gegebene Bruch

$$\frac{2a^2 - bc + 4c^2}{3b - 5c + 8a}.$$

§. 41.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, in welchem der Divid. und der Divis. beide complex sind, und bei welchem man nicht sogleich übersieht, ob der Divis. ein oder kein Fact. des Divid. ist.

Weil der Divis., mit dem Quot. multipl., den Divid. wieder geben muß, so folgt, daß dieser letztere alle Partialprod. enthalte, die aus jedem Gliede des Divis. mit jedem Gliede des Quot. entstehen. Könnte man nun die Partialprod. in dem Divid. auffinden, die aus einem Gliede des Divis. mit einem des Quotienten entstanden waren, so würde man, indem man sie mit diesem bekannten Gliede des Divisors dividirte, alle Glieder des Quot. erhalten, eben so wie man in der Arithmetik alle Ziffern des Quot. findet, wenn man nach und nach mit dem Divis. die Zahlen dividirt, die man als die Partialprod. dieses Divis. mit den verschiedenen Ziffern des Quot. betrachtet. Allein bei Zahlen erscheinen diese Partialprod. nach der Ordnung, wie es das Decimalsystem der Zahlen erfordert. So verhält es sich aber nicht in der Algebra; man ersetzt dieses aber, indem man alle Glieder des Divid. und des Divis. so ordnet, daß die Exp. der Potenzen von einerlei Buchst. in jedem Gliede von der Rechten zur Linken abnimmt, wie man es hier in Betreff des Buchst. a in den Größen

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5,$$
$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$$

sieht, von welchen die eine das Prod. und die andere der Multiplicandus in der Rechnung §. 32. ist; dieses nennt man die gegebenen Größen ordnen.

Wenn sie so geordnet sind, so begreift man, daß, welches auch immer der Fact. sein mag, mit welchem die zweite Grß. multipl. werden müßte, um die erste zu erhalten, ihr Anfangsglied $5a^7$ entstehe aus dem Anfangsgliede $5a^4$ der zweiten multipl. mit dem Gliede, in welchem a den höchsten Exp. in dem gesuchten Fact. hätte, und das von diesem nach a geordneten Fact. das Anfangsglied ist. Dividirt man also $5a^7$ mit $5a^4$, so wird der Quot. a^3 das erste Glied des gesuchten Fact. sein. Allein, nach den Regeln der Multipl. muß das ganze Prod. alle verschiedenen Partialprod. enthal-

ten, die aus der Multipl. des ganzen Multiplicandus mit jedem Gliede des Multiplicators entstehen Hieraus folgt, daß die hier als Dividendus genommene Größe alle Prod. von allen Gliedern des Divisors $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$ mit dem ersten Gliede a^3 des Quot. enthalten muß; und wenn man folglich vom Divid. diese Prod. $5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$ abzieht, der Rest $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ alsdann nur noch die Glieder enthält, die aus der Multipl. des Divis. mit dem zweiten, dritten u. s. w. Gliede des Quot. entstehen.

Der obige Rest kann daher als Partialdivid. angesehen werden; und sein erstes Glied, in welchem a den höchsten Exp. hat, konnte nur aus der Multipl. mit dem ersten des Divis. in den zweiten des Quot. entstehen. Da aber das erste Glied des Partialdivid. das Zeichen — hat, so muß das Zeichen bestimmt werden, welches das correspondirende Glied des Quot. haben muß: dieses ist nun nach der ersten Regel in §. 31. leicht; denn da die Größe $-20a^6b$, als ein Partialprod. betrachtet, ein entgegengesetztes Zeichen von dem des partiellen Multiplicandus $5a^4$ hat, so folgt hieraus, daß der partielle Multiplicator das Zeichen — gehabt haben muß. Macht man die Division wirklich mit $-20a^6b$ und $5a^4$, so ergiebt sich $-4a^2b$ als zweites Glied. Wenn man es mit allen Gliedern des Divisors multiplicirt und man das Prod. von dem part. Divid. abzieht, so enthält der Rest $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ nur noch die Prod. aus dem zweiten u. s. w. Gliede des Quotienten.

Sieht man diesen Rest als einen neuen part. Divid. an, so kann sein erstes Glied $10a^4b^3$ nur das Prod. aus dem ersten Gliede des Divis. durch das dritte des Quot. sein; und folglich wird man dieses dritte erhalten, indem man $10a^4b^3$ durch $5a^4$ dividirt. Der Quotient $2b^3$, mit dem ganzen Divis. multipl., giebt Producte, deren Subtraction

den partiellen Dividendus erschöpft. Dieses zeigt, daß der Quotient nur drei Glieder haben kann.

Hätte der Quot. noch mehr Glieder haben können, so würde man sie gewiß wie die vorhergehenden gefunden haben; und wenn, wie man annimmt, der Divid. den Divis. als Fact. hat, so muß die Subtr. des Prod. von diesem Divis. mit dem letzten Gliede des Quot. immer den letzten part. Divid. erschöpfen.

§. 42.

Um die Ausübung der oben gefundenen Regeln zu erleichtern, stelle man 1) den Divid. und den Divis. so wie für die Division der Zahlen, indem man beide nach einerlei Buchstaben ordnet, d. h. ihre Glieder so schreibt, daß die Exp. dieses Buchst. abnehmend fortgehen.

2) Das erste Glied des Divid. dividirt man mit dem ersten Gliede des Divis. und schreibt das Resultat an die für den Quotienten bezeichnete Stelle.

3) Den ganzen Divis. multipl. man mit dem eben gefundenen part. Quot., zieht dieses Prod. vom Divid. ab und macht die Reduction der ähnlichen Glieder.

4) Diesen Rest betrachtet man als einen neuen Divid., von dem man das erste Glied durch das erste Glied des Divis. dividirt; das Resultat schreibt man als ein zweites Glied des Quot., und verfolgt mit diesem Gliede die Operation wie oben, bis daß alle Glieder des Divid. erschöpft sind.

Wenn man sich erinnert, daß das Product allemal das Zeichen des Multiplicandus habe, wenn der Multiplicator das Zeichen + hat, und er im entgegengesetzten Falle das Zeichen — (§. 31.) hat, so folgt, daß wenn der part. Divid. und das erste Glied des Divis. einerlei Zeichen haben, der Quot. alsdann das Zeichen + haben muß;

und wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben, so muß der Quot. das Zeichen — haben: das ist die Regel der Zeichen.

Die partiellen Divisionen werden nach den für eintheilige Grß. gegebenen Regeln ausgeführt.

Man dividirt den Coeff. des Divid. mit dem des Divis. Dieses ist die Regel der Coefficienten.

Im Quot. schreibt man die dem Divid. und dem Divis. gemeinschaftlichen Buchst. mit einem Exp. gleich der Differenz von denen, die sie in diesen beiden Gliedern haben, und endlich schreibt man die Buchst., die nur im Divid. sind: dieses sind die Regeln der Buchst. und der Exponenten.

§. 43.

Um diese Regeln auf Grß. anzuwenden

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5,$$
$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2,$$

die mir oben als Beispiel gedient haben, so stellt man sie so, als wenn eine arithmetische Division auszuführen wäre.

Dividendus.	Divisor.
$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
$-5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2$	Quotient.
	$a^3 - 4a^2b + 2b^3$
Rest $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	
$+20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$	
Rest $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	
$-10a^4b^3 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5$	
Rest 0.	

Da das Zeichen vom ersten Gliede $5a^7$ des Dividendus dasselbe als vom ersten Gliede $5a^4$ des Divisor ist, so sollte

man + im Quot. ſetzen; da es aber das erſte Glied iſt, ſo läßt man das Zeichen weg.

Dividirt man $5a^7$ durch $5a^4$, ſo iſt a^3 der Quot., den man unter den Diviſor ſchreibt.

Multipl. man nach und nach die drei Glieder des Diviſors mit dem erſten Gliede a^3 des Quot., und ſchreibt die Prod. unter die correſp. des Divid., verändert, um ſie abziehen zu können, die Zeichen dieſer Prod. (§. 20), ſo wird man die Größe bilden

$$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2,$$

deren Addition mit dem Dividendus uns als Reſt giebt

$$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Setzt man die Diviſion in dieſen Reſt fort, ſo giebt das erſte Glied $-20a^6b$, mit $5a^4$ dividirt, als Quot. $-4a^2b$; dieſer Quot. muß das Zeichen — haben, weil der Divid. und der Diviſ. verſchiedene Zeichen haben. Dieſen Quot. mit allen Gliedern des Diviſ. multipl. und die Zeichen geändert, giebt die Größe

$$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3,$$

deren Addition mit dem Divid. und als Reſt giebt

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Das erſte Glied $10a^4b^3$ dieſes neuen part. Divid. durch das erſte Glied $5a^4$ des Diviſ. dividirt; den ganzen Diviſor mit dem Reſultat $+2b^3$ multipl.; die Prod. unter den part. Divid. geſchrieben, die Zeichen geändert und die Reduction gemacht, ſo bleibt nichts, welches anzeigt, daß $+2b^3$ das letzte Glied des geſuchten Quot. iſt, der folglich $a^3-4a^2b+2b^3$ ſein wird.

§. 44.

Es iſt dienlich zu bemerken, daß in der Diviſion die Multipl. der verſchiedenen Glieder des Quot. mit dem Diviſ. öfters Glieder erzeugen, die ſich in dem Divid. nicht finden, und die man nachgehends durch das erſte Glied des Diviſ.

dividiren muß. Diese Glieder sind diejenigen, die sich vernichtet haben, als man den Dividendus durch die Multipl. seiner zwei Fact. (des Quot. und des Divis.) gebildet hat. Hier ein merkwürdiges Beispiel von diesen Reductionen:

Es sei $a^3 - b^3$ zu dividiren durch $a - b$.

Division.

$$\begin{array}{r|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \hline -a^3 + a^2 b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline + a^2 b - b^3 & \\ -a^2 b + ab^2 & \\ \hline + ab^2 - b^3 & \\ -ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Multiplication.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \\ \hline a^3 - a^2 b \\ + a^2 b - ab^2 \\ + ab^2 - b^3 \\ \hline \end{array}$$

Resultat $a^3 - b^3$.

Das erste Glied a^3 des Divid., mit dem ersten Gliede a des Divis. dividirt, giebt a^2 als Quot.; diesen Quot. mit dem Divis. multipl. und die Zeichen der Prod. geändert, so findet man $-a^3 + a^2 b$; das Glied $-a^3$ vernichtet das erste Glied des Divid.; es bleibt aber das Glied $a^2 b$, welches nicht im Dividendus ist. Weil dieses Glied den Buchst. a enthält, so kann man es durch das erste Glied des Divisors dividiren und erhält $+ab$. Diesen Quot. durch den Divis. multiplicirt und die Zeichen der Prod. geändert, so kommt $-a^2 b + ab^2$; das Glied $-a^2 b$ vernichtet das vorhergehende; es bleibt aber das Glied $+ab^2$, welches auch nicht in dem Divid. war. Man dividire es durch a, so ist b^2 der Quot.; diesen partiellen Quotienten mit dem Divis. multipl. so wird man, nach Aenderung der Zeichen, haben $-ab^2 + b^3$; das erste Glied $-ab^2$ wird das vorhergehende vernichten, und das zweite $+b^3$ wird das im Divid. gebliebene letzte Glied $-b^3$ vernichten.

Um den Mechanismus von der Division recht einzusehen, bedarf es nur eines Blicks auf die Multipl. des Quot.

$a^2 + ab + b^2$ mit dem Divis. $a - b$, die neben der vorhergehenden Division steht; so wird man sehen, daß alle in den part. Divisionen hervorgebrachten Glieder diejenigen sind, die sich im Resultate der Multiplication vernichten.

§. 45.

Oefters kommt es, daß die Größe, nach welcher man ordnet, sich in mehreren Gliedern des Divid. oder des Divis. befindet. In diesem Falle muß man diese Glieder unter einander, oder auch unmittelbar die einen neben die andern schreiben, und sie dabei unter sich nach einem andern Buchst. ordnen.

Es sei $-a^4b^2 + b^2c^4 - a^2c^4 - a^6 + 2a^4c^2 + b^6 + 2b^4c^2 + a^2b^4$ zu dividiren durch $a^2 - b^2 - c^2$.

Wenn man die erste von diesen Größen nach dem Buchstaben a ordnet, so setzt man in einerlei Säule die Glieder $-a^4b^2$ und $+2a^4c^2$, in eine andere Säule die Glieder $+a^2b^4$ und $-a^2c^4$; endlich in eine letzte Säule die drei Glieder $+b^6$, $+2b^4c^2$, $+b^2c^4$, indem man sie nach dem Buchstaben b ordnet, wie auf der folgenden Seite zu sehen ist.

Das erste Glied $-a^6$ des Divid., mit dem ersten Gliede a^2 des Divis. dividirt, giebt $-a^4$ als erstes Glied des Quot.; bildet man nachgehends die Prod. von diesen Quot. mit allen Gliedern des Divis., ändert die Zeichen der Prod., um sie von dem Divid. abzuziehen, und schreibt alle Glieder, die einerlei Potenz von a haben, in einerlei Säule, so kommt nach der Reduct. der ähnlichen Glieder der erste Rest, den man als den zweiten part. Divid. nehmen wird.

Das erste Glied $-2a^4b^2$ dieses neuen Divid. durch a^2 dividirt giebt als zweites Glied des Quot. $-2a^2b^2$; macht man nun die Prod. dieses Quot. mit allen Gliedern des Divis., ändert die Zeichen von diesen Prod., um sie von dem part. Divid. abzuziehen, und schreibt alle Glieder, die einerlei Potenz von a

enthalten in einerlei Säule, so kommt, nach Reduction der ähnlichen Glieder, der zweite Rest, den man als einen dritten Part. Divid. nimmt.

Wird die Operation bei dem zweiten und den folgenden Resten auf gleiche Art fortgesetzt, so finden sich noch drei Glieder im Quotienten. Das letzte Glied des Quot. mit allen Gliedern des Divis. multiplicirt, giebt Producte, die, vom 4ten Rest abgezogen, ihn ganz vernichten; die Division geht also auf, und folglich ist der Divis. ein Fact. des Dividendus.

$$\begin{array}{r|l}
-a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 & a^2 - b^2 - c^2 \\
\hline
+2a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 & -a^4 - 2a^2b^2 - b^4 \\
+ b^2c^4 & + a^2c^2 - b^2c^2 \\
+a^6 - a^4b^2 & \\
- a^4c^2 & \\
\hline
\text{1ster Rest} -2a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 & \\
+ a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 & \\
+ b^2c^4 & \\
+2a^4b^4 - 2a^2b^4 & \\
- 2a^2b^2c^2 & \\
\hline
\text{2ter Rest} +a^4c^2 - a^2b^4 + b^6 & \\
- 2a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 & \\
- a^2c^4 + b^2c^4 & \\
-a^4e^2 + a^2b^2c^2 & \\
+ a^2c^4 & \\
\hline
\text{3ter Rest} -a^2b^4 + b^6 & \\
-a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 & \\
+ b^2c^4 & \\
+a^2b^4 - b^6 & \\
- b^4c^2 & \\
\hline
\text{4ter Rest} -a^2b^2c^2 + b^4c^2 & \\
+b^2c^4 & \\
+a^2b^2c^2 - b^4c^2 & \\
- b^2c^4 & \\
\hline
0 \qquad 0 &
\end{array}$$

§. 46.

Man kann die Division öfters erleichtern, wenn man, sogleich bei Ansicht einer Größe, sie in ihre Fact. zerlegt. Hätte man z. B. $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 + 2a^3 - b^2 + 1$ zu dividiren mit $2a^3 - b^2 + 1$, da dieser Divisor die drei letzten Glieder des Divid. ausmacht, so untersucht man, ob der Divis. auch ein Fact. der drei ersten Glieder ist; diese haben aber sichtbarlich den gemeinschaftlichen Fact. $4a^3$, dann $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 = 4a^3(2a^3 - b^2 + 1)$. Durch diese Bemerkung wird der Dividendus

$$4a^3(2a^3 - b^2 + 1) + 2a^3 - b^2 + 1,$$

oder $$(2a^3 - b^2 + 1)(4a^3 + 1);$$

die Division wird also zur Stelle ausgeführt, wenn man den Fact. $2a^3 - b^2 + 1$, der gleich dem Divis. ist, wegläßt. Der Quotient wird sein $4a^3 + 1$.

Eine lange Uebung im algebr. Calcul giebt die Fertigkeit, eine Menge von Bemerkungen dieser Art zu machen, wodurch man die Operat. oft ungemein abkürzt.

Uebt man sich oft, so wird man leicht dahin kommen die Zerlegung in Fact. zu erkennen; öfters macht man sie sehr in die Augen fallend, wenn man die vorkommende Multiplication nicht ausführt, sondern bloß anzeigt.

Von den algebraischen Brüchen.

§. 47.

Wenn man das Verfahren der algebr. Division auf zwei Größen anwendet, davon die eine nicht Fact. der andern ist, so begreift man die Unmöglichkeit die Division zu verrichten, weil man, in der Folge der Operat., zu einem Reste kommt, dessen erstes Glied nicht durch das erste Glied des Divis. dividirt werden kann. Z. B.

$$\begin{array}{r|l} a^3 + a^2b + 2b^3 & a^2 + b^2 \\ \hline -a^3 - ab^2 & a + b \\ \hline \text{1ster Rest } a^2b - ab^2 + 2b^3 & \\ -a^2b - b^3 & \\ \hline \text{2ter Rest } -ab^2 + b^3. & \end{array}$$

Das erste Glied $-ab^2$ des zweiten Rests, kann nicht durch das erste Glied a^2 des Divis. dividirt werden; die Division muß hier inne halten. Man könnte, wie in der Arithm., zu dem Quot. $a+b$ den Bruch $\frac{-ab^2+b^3}{a^2+b^2}$ seßen, der den Rest als Zähler und den Divisor als Nenner hat; und der Quot. wäre

$$a + b + \frac{b^3 - ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Division inne halten muß, wenn man zu einem Reste kommt, dessen erstes Glied den Buchst., nach welchem man geordnet hat, nur in einer niedern Potenz enthält, als derselbe Buchst. im ersten Gliede des Divisors hat.

§. 48.

Wenn die algebr. Division von zwei Größen sich nicht ausführen läßt, so wird der Quot. nur unter einer Bruchform angezeigt, indem man den Divid. als Zähler und den Divisor als Nenner nimmt; und um ihn zu dem höchst möglichen Grad von Einfachheit zu bringen, so muß man nachsehen, ob der Divid. und der Divis. keine gemeinschaftlichen Fact. haben, um sie wegzulassen (§. 38). Gilt es Polynomen, so entdeckt man die gemeinsch. Fact. nicht so leicht als bei Monomen; man findet sie überhaupt nur, wenn man durch eine ähnliche Methode wie die in der Arithm. für die Zahlen gegebene, den größten gemeinsch. Divisor der zwei gegebenen Größen sucht.

Die relativen Größen der algebr. Ausdrücke können nicht angegeben werden, so lange man den Buchst. die sie enthalten, keinen Werth giebt; die Benennung größter gemeinsch. Theiler, auf diese Ausdrücke angewandt, darf also nicht ganz in dem Sinne als in der Arithm. genommen werden.

In der Algebra muß man unter dem größten gemeinsch. Divisor von zwei Ausdrücken denjenigen von ihren gemeinschaftlichen Divisoren verstehen, der die mehrsten Fact. in allen seinen Gliedern enthält, oder der vom höchsten Grade ist (§. 27). Seine Bestimmung beruht, wie in der Arithm., auf folgendes Princip: Jeder gemeinsch. Divisor von zwei Größen muß auch den Rest ihrer Division theilen.

Der in der Arithm. (§. 61) gegebene Beweis wird deutlicher, wenn man dazu die algebr. Symbole gebraucht. Es sei D der gemeinsch. Divis. Die zwei gegebenen Größen könnten durch die Prod. AD und BD aus dem gemeinsch. Divis. und aus dem Fact. mit welchem er in jeder dieser Größen multipl. ist, vorgestellt werden. Wenn nun Q den ganzen Quotienten und R den Rest, welchen die Division von AD durch BD giebt, vorstellt, so hat man

$$AD = BD \times Q + R \text{ (Arithm. 61);}$$

diese Gleichung mit D dividirt, giebt

$$A = BQ + \frac{R}{D};$$

und weil die erste Hälfte der Gleichung, die in diesem Falle aus denselben Gliedern als die zweite Hälfte zusammengesetzt sein muß, eine ganze Zahl ist, so muß sich $\frac{R}{D}$ zu einem Ausdruck ohne Divis. reduciren, d. h. R muß durch D theilbar sein.

Diesem Princip gemäß, fängt man, wie in der Arithm. an, zu untersuchen, ob nicht eine von den zwei gege-

benen Größen ein Divisor von der andern sei; ergiebt sich bei dieser Division ein Rest, so wird mit diesem Reste in dem ersten Divis. dividirt und so fort, und derjenige dieser Reste, der den vorhergehenden ohne Rest dividirt, wird der gemeinsch. größte Divisor der beiden gegebenen Größen; allein man muß bei diesen angezeigten Divisionen noch Manches beobachten, was von der Natur der algebr. Größen abhängt.

Man muß zuerst nur dann einen gemeinschaftlichen Divisor von zwei algebraischen Ausdrücken suchen, wenn sie gemeinsch. Buchst. haben; von diesen Buchst. wählt man einen, nach diesem ordnet man die gegebenen Ausdrücke und nimmt denjenigen, in welchem dieser Buchst. den höchsten Exp. hat, zum Dividendus: der andere wird Divisor.

Es seien die zwei Größen

$$3a^3 - 3a^3b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

die nach dem Buchst. a geordnet sind; man nehme die erste als Divid. und die zweite als Divisor. Gleich beim Anfange der Operat. zeigt sich eine Schwierigkeit, die bei den Zahlen nicht Statt hat; das erste Glied des Divis. ist kein Theil vom ersten Gliede des Divid.; denn jener hat 4 und b zu Fact., die dieser nicht hat. Da aber b allen Gliedern des Divis. gemein ist, ohne es auch von allen Gliedern des Divid. zu sein, so folgt hieraus (§. 40), daß b ein Fact. vom Divis. aber nicht vom Divid. ist. Nun ist aber gewiß, daß jeder gemeinsch. Fact. zweier Größen sich nur aus Fact. die beiden gemein sind, zusammensetzen läßt; wenn also zwischen den zwei gegebenen Größen ein solcher Divisor vorhanden ist, so kann er sich nur unter den Fact. der Größe $4a^2 - 5ab + b^2$ finden, die übrig bleibt, wenn man b aus der Grß. $4a^2b - 5ab^2 + b^3$ wegläßt; die Aufgabe reducirt sich also darauf, den größten gemeinschaftlichen Divisor der zwei Größen

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2 - 5ab + b^2$$

zu suchen.

Aus denselben Gründen, nach welchen man in der einen der gegebenen Grß. den Fact. b, der in der andern nicht war, weglassen konnte, kann man auch in diesen einen neuen Fact. einführen, nur muß er nicht Fact. der ersten sein. Hierdurch ist der größte gemeinsch. Divisor dieser Grß., der nur aus Factoren, die beiden gemein sind, gebildet ist, nicht gefährdet. Ich benutze diese Bemerkung, um die Größe $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ mit 4 zu multipl., die kein Fact. von der Grß. $4a^2 - 5ab + b^2$ ist, damit die Division des ersten Gliedes der einen mit dem ersten Gliede der andern möglich gemacht wird.

Ich habe also als Divid. die Größe

$$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3,$$

als Divis. die Größe

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

und der part. Quot. wird sein $3a$.

Den Divisor durch diesen Quot. dividirt und das Prod. vom Divid. abgezogen, so kommt als Rest

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3,$$

eine Größe, die nach dem zu Anfange dieses §. gesetzten Princip, noch mit $4a^2 - 5ab + b^2$ den nämlichen größten Divis. als die erste haben muß.

Diese Bemerkungen wie oben benutzend, lasse ich den Fact. b weg, der allen Gliedern des obigen Restes gemein ist und multiplicire ihn mit 4, damit die Division seines ersten Gliedes mit dem ersten Gliede des Divis. möglich gemacht wird. Alsdann habe ich als Divid. die Grß.

$$12a^2 + 4ab - 16b^2,$$

und als Divis. die Grß.

$$4a^2 - 5ab + b^2;$$

der part. Quot. ist 3.

Multipl. wir den Divis. mit dem Quot. und ziehen das Prod. vom Divid. ab, so haben wir als Rest

$$19ab - 19b^2,$$

und die Aufgabe ist darauf reducirt den größten gemeinsch. Divis. zwischen dieser Größe und

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Aber da der Buchst. a, in Bezug dessen die Division gemacht wird,, in dem Reste nur noch im ersten Grade da ist, während er im Divis. sich im zweiten Grade befindet, so ist es dieser, den man als Divid. nehmen und aus dem Reste den Divis. machen muß.

Vor dem Anfange dieser neuen Division lasse ich aus dem Divis. $19ab - 19b^2$ den allen Gliedern gemeinschaftl. Fact. $19b$ und der nicht Fact. des Divid. ist, weg; ich habe also als Divid. die Grß.

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

und als Divisor

$$a - b.$$

Die Division geht auf; also ist $a - b$ der verlangte größte gemeinsch. Divisor.

Gehet man von der letzten Division zurück bis zur ersten, so wird man auch *a posteriori* darthun, daß die Grß. $a - b$ in beiden gegebenen Grß. aufgeht und daß sie unter allen aufgehenden Theilen die zusammengesetzteste ist; und wenn man mit $a - b$ die beiden gegebenen Größen

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3, \quad 4a^2b - 5ab^2 + b^3$$

dividirt, so zerlegt man sie wie folgt:

$$(3a^2 + b^2)(a - b), \quad (4ab - b^2)(a - b).$$

§. 49.

Sollte die zum Divis. genommene Grß. mehrere Glieder enthalten, in welchen der Buchst., nach welchem geordnet worden, sich auf einerlei Grad befindet, so bedarf es einer

Achtsamkeit, ohne welche die Operat. sich nicht endigen würde. Hier ein Beispiel:

Es seien die Größen

$$a^2 b + a c^2 - d^3, \quad a b - a c + d^2;$$

bereitet man die Operat. wie zu einer gewöhnlichen Division vor,

$$\begin{array}{l|l} a^2 b + a c^2 - d^3 & a b - a c + d^2 \\ \hline -a^2 b + a^2 c - a d^3 & a \\ \hline \end{array}$$

Rest $a^2 c + a c^2 - a d^2 - d^3$,

dividiren wir zuerst $a^2 b$ durch $a b$, so ist a der Quot; den Divis. mit diesem Quot. multipl. und die Prod. vom Divid. abgezogen, so wird der Rest ein neues Glied enthalten, in welchem a auf dem zweiten Grade ist, nämlich $a^2 c$ entsteht aus dem Prod. von $-ac$ mit a. Auf diese Art hätte die Operat. gar keine Fortschritte gemacht; denn nimmt man den Rest $a^2 c + a c^2 - a d^2 - d^3$ als Divid. und multipl. ihn mit b, um die Division durch ab möglich zu machen, so hätte man

$$\begin{array}{l|l} a^2 b c + a b c^2 - a b d^2 - b d^3 & a b - a c + d^2 \\ \hline -a^2 b c + a^2 c^2 - a c d^2 & a c \\ \hline \end{array}$$

Rest $a^2 c^2 + abc^2 - acd^2 - abd^2 - bd^3$

und das Glied $-ac$ wird noch ein Glied $a^2 c^2$ hervorbringen, in welchem a vom zweiten Grade ist.

Um dieser Unbequemlichkeit auszuweichen, bemerke man, daß der Divis. $ab - ac + d^2 = a(b - c) + d^2$, wenn man die Glieder $ab - ac$ in ein einziges vereinigt; und macht, um den Calcul abzukürzen, $b - c = m$, so wird man $am + d^2$ als Divisor haben; aber alsdann müßte man den ganzen Divid. $a^2 b + a c^2 - d^3$ mit dem Fact. m multipl., um einen neuen Divid. zu haben, dessen erstes Glied mit der Grß. am, die das erste Glied des Divis. bildet, theilbar sei. Die Operation wird also

$$\begin{array}{r|l} a^2 b m + a c^2 m - d^3 m & a m + d^2 \\ \hline -a^2 b m - a b d^2 & a b + c^2 \\ \hline \text{1ster Rest } -a b d^2 + a c^2 m - d^3 m & \\ -a c^2 m - c^2 d^2 & \\ \hline \text{2ter Rest } -a b d^2 - c^2 d^2 - d^3 m. & \end{array}$$

Diesesmal sind aus dem Divid. die mit a^2 behafteten Glieder weggenommen, und es bleiben nur noch Glieder mit ersten Potenz von a. Um diese wegzuschaffen, dividirt man zuerst das Glied $a c^2 m$ durch $a m$, und es kommt c^2 als Quot. Den Divisor mit dem Quot. multipl. und die Prod. von dem Dividendus subtrahirt, giebt den 2ten Rest; nimmt man diesen 2ten Rest als einen neuen Divid., so muß man darin den Fact. d^2 weglassen, der kein Fact. des Divis. ist; es kommt:

$$-ab - c^2 - dm,$$

welche man wiederum mit m multipl. und hat

$$\begin{array}{r|l} -a b m - c^2 m - d m^2 & a m + d^2 \\ \hline +a b m + b d^2 & -b \\ \hline \text{Rest } +b d^2 - c^2 m - d m^2. & \end{array}$$

Da der Rest $b d^2 - c^2 m - d m^2$ von dieser letzten Division a nicht mehr enthält, so folgt hieraus, daß, wenn zwischen den beiden gegebenen Größen ein gemeinsch. Divisor vorhanden ist, so ist Er von dem Buchst. a unabhängig.

Ist dieses erreicht, so kann man die Division in Bezug auf den Buchst. a nicht weiter fortsetzen; man wird aber bemerken, daß wenn ein gemeinsch. Divis. unabhängig von a zwischen den Grß. $b d^2 - c^2 m - d m^2$ und $a m + d^2$ vorhanden ist, so muß er die beiden Theile $a m$ und d^2 des Divisors jeden besonders theilen; denn allgemein, wenn eine Grß. nach den Potenzen des Buchst. a geordnet ist, so muß jeder von a unabhängige Divis. dieser Größe, die Grß., welche

die verschiedenen Potenzen dieses Buchst. multipl., jede besonders theilen.

Um sich davon zu überzeugen, reicht es hin zu bedenken, daß in diesem Falle jede von den gegebenen Grß. ein Prod. aus einer von a abhängigen Grß. und aus dem davon unabhängigen gemeinsch. Divisor war. Hat man z. B. den Ausdruck

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E,$$

in welchem die Buchst. A, B, C, D, E beliebige von a unabhängige Grß. bezeichnen und multipl. sie mit einer ebenfalls von a unabhängigen Grß. M, so wird das nach a geordnete Product

$$MAa^4 + MBa^3 + MCa^2 + MDa + ME,$$

noch dieselben Potenzen von a als vorher enthalten; der Coeff. von jeder dieser Potenzen wird aber ein Vielfaches von M sein.

Setzt man nun für m die Grß. $b - c$, welche dieser Buchst. vorstellt, so hat man die Grß.

$$bd^2 - c^2 \quad (b - c) - d\,(b - c)^2,$$

$$a\,(b - c) + d^2;$$

allein es ist sichtbar, daß $b - c$ und d^2 keinen Fact. gemein haben; die zwei gegebenen Grß. haben also keinen gemeinsch. Factor.

War es bei der bloßen Ansicht nicht zu erkennen, daß zwischen $b - c$ und d^2 kein gemeinschaftlicher Divisor da ist, so hätte man ihren größten gemeinsch. Divisor suchen müssen, indem man sie nach einerlei Buchst. ordnet und sich dann versichert, ob er auch die Grß.

$$bd^2 - c^2\,(b - c) - d(b - c)^2$$

theilen kann.

§. 50.

Anstatt den größten gemeinsch. Divis. erst am Ende der Operat. unabhängig in Bezug des Buchst., nach welchem

man die beiden Größen geordnet hat, zu entdecken, ist es viel bequemer, ihn sogleich aufzusuchen, weil öfters die Reste von jeder part. Operation nach Maaßgabe des Vorschreitens, zusammengesetzter werden, und der Calcul fernerhin immer beschwerlicher wird.

Es seien z. B. die Größen

$$a^4 b^2 + a^3 b^3 + b^4 c^2 - a^4 c^2 - a^3 b c^2 - b^2 c^4,$$
$$a^2 b + a b^2 + b^3 - a^2 c - a b c - b^2 c;$$

nachdem sie nach dem Buchst. a geordnet worden, welches geben wird

$$(b^2 - c^2) a^4 + (b^3 - b c^2) a^3 + b^4 c^2 - b^2 c^4,$$
$$(b - c) a^2 + (b^2 - b c) a + b^3 - b^2 c,$$

werde ich sogleich gewahr, daß wenn sie einen von a unabhängigen Divis. haben, so muß er eine jede der Größen einzeln dividiren, welche die verschiedenen Potenzen von a (§. 49.), als auch die Größe $b^4 c^2 - b^2 c^4$ und $b^3 - b^2 c$, die diesen Buchst. nicht enthalten, multipliciren.

Die Aufgabe ist also darauf zurück geführt, die gemeinschaftlichen Divis. von zwei Grß. $b^2 - c^2$ und $b - c$ zu finden, und dann zu prüfen, ob unter diesen Divisoren sich welche finden, die zugleich

$b^3 - b c^2$ und $b^2 - b c$, $b^4 c^2 - b^2 c^4$ und $b^3 - b^2 c$

theilen könnten. Dividirt man $b^2 - c^2$ durch $b - c$, so findet man einen genauen Quot. $b + c$; $b - c$ ist also gemeinsch. Divis. der Grß. $b^2 - c^2$ und $b - c$, die sichtbarlich keine andere haben können, weil die Grß. $b - c$ nur durch sich selbst und durch die Einheit theilbar ist. Man muß sich also versichern ob $b - c$ die andern oben angeführten Größen theilt, oder ob er zugleich die beiden gegebenen Grß. theilt; dieses geschiehet in der That, und es kommt

$$(b + c) a^4 + (b^2 + b c) a^3 + b^3 c^2 + b^2 c^3,$$
$$a^2 + b a + b^2.$$

Um die letztern Ausdrücke zu dem höchst möglichen Grad von Einfachheit zu bringen, ist es wohlgethan, zu versuchen,

ob die erstere nicht durch $b+e$ theilbar ist; die Ausführung dieser Division zeigt, daß sie gelingt, und es bleibt nur noch der gemeinsch. Divis. dieser sehr einfachen Größen zu suchen:

$$a^4+ba^3+b^2c^2,$$
$$a^2+ba+b^2.$$

Wird mit diesen nach Vorschrift der Regel verfahren, so gelangt man nach der zweiten Division zu einem Reste, welcher den Buchstaben a zur ersten Potenz enthält; und da dieser Rest nicht der gemeinsch. Divisor ist, so schließt man hieraus der Buchst. a sei kein Theil von dem gesuchten gemeinsch. Divisor, der folglich nur aus dem einzigen Factor $b-c$ zusammengesetzt ist.

Wenn, außer diesen gemeinsch. Divisor, man einen andern gefunden hätte, in welchem die Größe a vorkäme, so hätte man, um den gesuchten größten gemeinsch. Divisor zu erhalten, diese zwei Divis. mit einander multipl. müssen.

Diese Bemerkungen werden hinreichen, um in allen Fällen, bei erlangter Fertigkeit in der Analysis, zum größten gemeinsch. Divisor zu gelangen, und man wird ohne Mühe finden, daß die Größen

$$6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2,$$
$$9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3,$$

als größten gemeinsch. Divis. die Größe $3a^2-2c^2$ haben.

§. 51.

Die vier **Hauptrechnungsarten**, d. h. die Addition, Subtraction, Multiplication und Division in algebr. Brüchen werden wie bei arithm. Brüchen ausgeführt, man muß nur in den Operationen, welche die Regeln der Arithm. vorschreiben, die oben in Betreff der algebr. Grß. angezeigten Verfahren beobachten. Ich werde mich also beschränken, hier diese Regeln nur in Erinnerung zu bringen, indem ich von einer jeden ein Beispiel der Anwendung gebe.

Die Summe der Brüche

$$\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{e}{d},$$

die einerlei Nenner haben, oder

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+e}{d},$$ (Arithm. 65.)

Der Unterschied der Brüche

$$\frac{a}{d} \text{ und } \frac{b}{d},$$

die einerlei Nenner haben, oder

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}.$$

Die Ganze a zu dem Bruche $\frac{b}{c}$ gesetzt, oder der Ausdruck

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$ (Arithm. 67).

Eben so der Ausdruck

$$a - \frac{b}{e} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}.$$

Umgekehrt

der Ausdruck $\frac{ac+b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$.

der Ausdruck $\frac{ac-b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = a - \frac{b}{c}$ (Arithm. 66).

§. 52.

Die auf einerlei Nenner reducirten Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d},$ werden respective

$$\frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd}$$ (Arithm. 68).

Die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h},$$

durch dieselbe Reduction werden respective

$$\frac{adfh}{bdfh}, \quad \frac{cbfh}{bdfh}, \quad \frac{ebdh}{bdfh}, \quad \frac{gbdf}{bdfh}$$ (Arithm. 69.)

In §. 69. der Arithm. habe ich ein Verfahren angegeben, um in gewissen Fällen zu einem viel einfachern Nenner zu gelangen als derjenige ist, der nach der allgemeinen Regel entstehet.

Hat man z. B. die zwei Brüche $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, so ist es leicht zu sehen, daß die beiden Nenner dieselben wären, wenn f ein Fact. des erstern wäre und c ein Fact. des zweiten; man multiplicire also die zwei Glieder des ersten Bruchs mit f und die zwei Glieder des zweiten Bruchs mit c, welches die Brüche $\frac{af}{bcf}$ und $\frac{cd}{bcf}$ geben wird, einfacher als $\frac{abf}{bbcf}$ und $\frac{bcd}{bbcf}$, welche man durch die Multiplication der primitiven Nenner hätte.

Allgemein: **Um den gemeinsch. Nenner zu bilden, vereinige man in ein Prod. alle verschiedenen Fact. zu der höchsten Potenz erhoben, in welchen sie sich in den Nennern der gegebenen Brüche finden, und es bleibt nur noch übrig, den Zähler eines jeden Bruchs durch diejenigen Fact. dieses Prod. zu multipl., die in dem Nenner des Bruchs fehlen.**

Hat man z. B. die Brüche $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, so bilde ich das Prod. b^2cfg; ich multipl. den Zähler des ersten Bruchs mit fg, den des zweiten mit bcg, den des dritten mit b^2f, und erhalte

$$\frac{afg}{b^2cfg}, \quad \frac{bcdg}{b^2cfg}, \quad \frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

§. 53.

Für die Multiplication hat man

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b} \text{ (Arithm. 53).}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ (Arithm. 76).}$$

Für die Division

$\frac{a}{b}$ zu dividiren durch c, giebt $\frac{a}{bc}$ oder $\frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$ (Arithm. 54, 76);

$\frac{a}{b}$ zu dividiren durch $\frac{c}{d}$, giebt $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (Arithm. 79).

Die Glieder der vorhergehenden Brüche waren Monomen; hätte man aber Brüche, deren Glieder Polynomen wären, so darf man nur die angezeigten Operationen mit den Monomen, durch die für die complexen Größen gegebenen Regeln ausführen. Auf diese Art hat man

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \times \frac{a-b}{c-d} = \frac{(a^2+b^2)\,(a-b)}{(c+d)\,(c-d)}$$

$$= \frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3}{c^2-d^2}.$$

Der Quotient des Bruchs

$\frac{a^2+b^2}{c+d}$ dividirt durch $\frac{a-b}{c-d}$

ist $\frac{a^2+b^2}{c+d} \times \frac{c-d}{a-b} = \frac{(a^2+b^2)\,(c-d)}{(c+d)\,(a-b)}$;

$$= \frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd}$$

und so mit den andern Operationen.

§. 54.

Ist man mit allem was vorhergehet bekannt genug, so kann man eine Gleichung vom ersten Grade auflösen, so zusammengesetzt sie auch immer sein mag.

Hätte man z. B. die Gleichung

$$\frac{(a+b)\ (x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{aa}{3a+b},$$

so schafft man zuerst die Nenner weg, und wenn die Operation nur angezeigt worden, alsdann kommt

$$(a+b)\ (x-c)\ (3a+b)+4b\ (a-b)\ (3a+b)$$
$$=2x(a-b)\ (3a+b)-ac\ (a-b);$$

nun die Multiplicationen ausgeführt, so findet man

$$3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c$$
$$+12a^2b-8ab^2-4b^3=$$
$$6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc;$$

alle mit x behaftete Glieder auf eine Seite gebracht, so erhält man

$$-3a^2x+8abx+3b^2x$$
$$=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3,$$

woraus man endlich schließt

$$x=\frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{-3a^2+8ab+3b^2}.$$

Von den Aufgaben mit zwei unbekannten Größen, und von den negativen Größen.

§. 55.

In den bisher aufgelösten Aufgaben hat man nur eine unbekannte Größe aufgenommen, mittelst der man, mit den bekannten Größen, alle Bedingungen der Aufgabe ausgedrückt hat. Es ist öfter für einige dieser Aufgaben bequemer, zwei unbekannte zu gebrauchen, aber alsdann müssen auch zwei Bedingungen, die entweder wörtlich oder doch stillschweigend ausgedrückt sind, da sein, um zwei Gleichungen zu bilden, denn sonst könnte man die zwei unbekannten Größen nicht zugleich bestimmen.

Die Aufgabe in §. 3., besonders wie sie in §. 4. vorgetragen ist, stellt sich ungezwungen mit zwei unbekannten

Größen

Größen dar, nämlich die eine und die andere der gesuchten Zahlen. In der That, wenn man

die kleinste mit x,
die größte mit y,
ihre Summe mit a,
ihre Differenz mit b

bezeichnet, so hat man, durch den Inhalt der Aufgabe,

$$x+y=a,$$
$$y-x=b.$$

Jede von diesen Gleichungen allein betrachtet, kann durchaus keine der unbekannten bestimmen. Wenn man z. B. aus der zweiten den Werth von y zieht, so giebt sie

$$y=b+x,$$

einen Werth, der gleich Anfangs von dem was gesucht wird, gar nichts zu verrathen scheint, weil er die nicht gegebene Größe x enthält; wenn man sie aber an die Stelle der unbekannten y, welche sie vorstellt, in der ersten Gleichung setzt, so enthält diese Gleichung alsdann nur noch die eine unbekannte Größe x, deren Werth hieraus durch das bereits gelehrte Verfahren gefunden wird.

Man hat in der That durch diese Substitution

$$x+b+x=a,$$

oder

$$2x+b=a,$$

oder endlich

$$x=\frac{a-b}{2};$$

und diesen Werth von x in den von y gesetzt, der $b+x$ ist, so erhält man

$$y=b+x=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2};$$

man hat also für die beiden unbekannten Zahlen dieselben Ausdrücke als in §. 3.

Es ist wirklich leicht zu sehen, daß die obige Auflösung im Wesentlichen von der in §. 3. nicht abweicht; ich habe nur die zweite Gleichung $y-x=b$ aufgestellt und gelöst,

von der ich mich in dem citirten §. begnügt hatte, sie bloß in der gewöhnlichen Sprache vorzutragen, und aus welcher ich ohne algebr. Calcul schloß, daß die größte Zahl $x+b$ sei.

§. 56.

Es sei noch folgende Aufgabe:

Ein Tagelöhner arbeitete bei einem Gutsbesitzer 12 Tage lang und hatte während der ersten 7 Tage bei sich seine Frau und seinen Sohn und erhielt 74 Franken. Nachher arbeitete er noch 8 Tage bei demselben Gutsbesitzer, während dieser Zeit, waren seine Frau und Sohn 5 Tage mit ihm und er erhielt für diese Zeit 50 Franken. Wie viel hat der Mann täglich und wie viel hat täglich die Frau und der Sohn verdient?

Es sei x der tägliche Gewinn des Mannes,

y der von der Frau und dem Sohne;

12 Arbeitstage des Mannes bringen ihm $12x$ ein,

7 = = = = = = der Frau und des Sohnes bringen $7y$ ein;

man hat also durch den ersten Umstand der Aufgabe:

$$12x+7y=74:$$

8 Arbeitstage des Mannes geben $8x$,

5 = = = = = = der Frau und des Sohns $5y$;

man hat also durch den zweiten Umstand der Aufgabe:

$$8x+5y=50.$$

Schließt man hier eben so wie in der vorhergehenden Aufgabe, so nimmt man den Werth von y in der ersten Gleichung, und wird haben

$$y=\frac{74-12x}{7};$$

diesen Werth, multiplicirt mit 5, setzt man in der zweiten, weil $5y$ da ist, und es kommt

$$8x+\frac{370-60x}{7}=50,$$

eine Gleichung, die nur noch die unbekannte x allein enthält.

Lösen wir sie auf, so hat man nach und nach

$$56x + 370 - 60x = 350,$$

$$370 - 4x = 350;$$

$-4x$ nach der zweiten Hälfte versetzt und 350 nach der ersten, so wird man erhalten

$$370 - 350 = 4x$$

$$20 = 4x$$

$$\frac{20}{4} = x$$

$$5 = x.$$

Da nun x, die so eben gleich 5 gefunden, bekannt ist, und man diesen Werth in der Formel

$$y = \frac{74 - 12x}{7},$$

setzt, so wird die zweite Hälfte bekannt, und man wird haben

$$y = \frac{74 - 12 \times 5}{7} = \frac{74 - 60}{7} = \frac{14}{7} = 2;$$

also $y = 2$.

Der Mann bekam also täglich 5 Franken, während die Frau und der Sohn nur 2 bekamen.

§. 57.

Der Leser wird bei der eben gemachten Auflösung der Gleichung $370 - 4x = 350$ vielleicht bemerkt haben, daß ich $4x$ nach der zweiten Hälfte hin versetzt habe; ich habe so verfahren, um einer kleinen Schwierigkeit auszuweichen, die ohne dieses Statt gehabt hätte, und die ich jetzt aufklären will.

Lassen wir $4x$ in der ersten Hälfte und versetzen 370 nach der zweiten Hälfte, so hätte man

$$-4x = 350 - 370,$$

und reducirt man die zweite Hälfte nach der Regel des §. 19., so entstehet

$$-4x = -20.$$

Weil man aber in dem vorhergehenden §. das Zeichen — vermeidet, mit welchem die Größe $4x$ behaftet ist, indem man diese Größe nach dem andern Gliede versetzt; daß gleichfalls die Größe $35^o - 37^o$ geworden ist $37^o - 35^o$, indem man die Hälften versetzt, und daß endlich eine Größe, wenn sie so von der einen nach der andern Hälfte versetzt wird, ihr Zeichen ändert (§. 10.), so kann man unläugbar zu denselben Resultaten gelangen, wenn man unmittelbar das Zeichen der Größen $-4x$, $+35^o - 37^o$ ändert, welches geben wird

$$4x = -35^o + 37^o,$$

oder

$$4x = 37^o - 35^o,$$

eine Gleichung, die gewiß dieselbe ist als

$$37^o - 35^o = 4x.$$

Man kann selbst die Zeichenveränderung erst in dem letzten Resultat vornehmen

$$-4x = -20;$$

und es kommt alsdann, wie oben,

$$4x = 20.$$

Es folgt hieraus, daß man gleichgültig in der einen oder in der andern Hälfte der Gleichungen alle mit der unbekannten behafteten Größe bringen kann, nur muß man zugleich die Zeichen in beiden Hälften des letzten Resultats ändern, wenn die unbekannte das Zeichen — hat.

§. 58.

Bevor wir, mittelst der Buchstaben, die allgemeine Auflösung der Aufgabe aus §. 56. unternehmen, will ich noch einen besondern Fall untersuchen. Ich nehme an, daß die erste Summe, die der Tagelöhner erhalten hat, 46 Fr. betrage und die zweite 30 Fr., übrigens die andern Umstände dieselben bleiben; so werden die Gleichungen der Aufgabe sein

$$12x + 7y = 46$$

$$8x + 5y = 30.$$

Die erste giebt

$$y = \frac{46 - 12x}{7};$$

diesen Werth mit 5 multipl. um das Resultat in die Stelle von $5y$ in der zweiten Gleichung zu setzen, so wird man haben

$$8x + \frac{230 - 60x}{7} = 30;$$

werden die Nenner fortgeschafft, so erhält man

$$56x + 230 - 60x = 210,$$

oder $$56x - 60x = 210 - 230,$$

oder $$-4x = -20;$$

und ändert man nach der Bemerkung in dem vorhergehenden §. die Zeichen in beiden Hälften der Gleichung, so findet man endlich

$$4x = 20$$

$$x = \frac{20}{4} = 5.$$

Substituirt man in dem Ausdruck von y, in der Stelle von x, ihren Werth 5, so kommt

$$y = \frac{46 - 60}{7},$$

und den Zähler von dem Werthe von y reducirt, so hat man

$$y = \frac{-14}{7}.$$

Wie muß man nun dieses Zeichen — auslegen, welches vor der isolirten Größe 14 steht? Man versteht wohl was die Sammlung von zwei durch das Zeichen — getrennten Größen bedeute, wenn die zu subtrahirende Größe die kleinere ist; wovon soll man aber eine Größe abziehen, die zu keiner andern in der Hälfte der Gleichung, worin sie sich befindet, addirt ist? Das beste Mittel, welches sich darbietet, diese Art von Paradoxon aufzuklären, ist, zu den Gleichungen selbst, welche die Bedingung der Aufgabe ausdrücken, zurück zu gehen; denn hat man den Vortrag der Aufgabe vor

Augen, so wird man darin die Umstände, welche die gegenwärtige Schwierigkeit herbei geführt hat, besser erkennen.

Ich nehme also die Gleichung wieder auf

$$12+7y=46,$$

in die Stelle von x setze ich ihren Werth 5, und es kommt

$$60+7y=46.$$

Die bloße Ansicht dieser Gleichung läßt darin sogleich eine Ungereimtheit erkennen. In der That ist es nicht möglich die Zahl 46 zu bilden, indem man etwas zu der Zahl 60 addirt, die allein schon 46 übertrifft.

Ich nehme auch die zweite Gleichung

$$8x+5y=30,$$

hier 5 statt x gesetzt, finde ich

$$40+5y=30;$$

eine eben solche Ungereimtheit als vorhin, weil die Zahl 30 gebildet werden soll, indem man etwas zur Zahl 40 addirt.

In der ersten Gleichung drücken nun die Größen $12x$ oder 60, und in der zweiten $8x$ oder 40 dasjenige aus, was der Tagelöhner bloß durch seine Arbeit gewonnen hat; die Größen $7y$ und $5y$ stellen den Gewinn von der Frau und ihrem Sohn vor, während die Zahlen 46 und 30 die als gemeinschaftliche Besoldung dieser drei Personen gegebene Summe bezeichnen; jetzt wird man wohl einsehen, worin die Absurdität besteht.

Nach der Aussage gewinnt der Tagelöhner allein mehr als mit Hülfe seiner Frau und Sohn; es ist also unmöglich das für die Arbeit der Frau und des Sohnes erhaltene Geld als eine Vermehrung von der Besoldung dieses Tagelöhners anzusehen.

Wenn man aber das der Frau und dem Sohn zugeschriebene Geld nicht als einen Gewinn, sondern als eine durch sie dem Tagelöhner zur Last fallende Ausgabe betrachtet, alsdann müßte man dieses Geld abziehen von dem, was

der Mann allein gewonnen hätte, und es wären keine Widersprüche mehr in den Gleichungen, weil sie würden

$$60 - 7y = 46,$$
$$40 - 5y = 30.$$

Aus der einen wie aus der andern wird man ziehen

$$y = 2;$$

und wird hieraus schließen, daß wenn der Tagelöhner 5 Fr. täglich gewinnt, seine Frau und Sohn ihm täglich 2 Fr. Ausgaben verursachen, welches man übrigens so prüfen kann.

Für 12 Arbeitstage muß der Tagelöhner bekommen

5 Fr. × 12 oder 60 Fr.;

die Ausgabe für seine Frau und Sohn während 7 Tage ist

2 Fr. × 7 oder 14 Fr.

es bleiben also 46 Fr.

Für 8 Arbeitstage müßte der Tagelöhner haben

5 Fr. × 8 oder 40 Fr.;

die Ausgabe für Frau und Sohn während 5 Tage ist

2 Fr. × 5 oder 10 Fr.:

es bleiben ihm also noch 30 Fr. übrig.

Es ist nun klar, daß statt des Vortrages in §. 56., wenn die gegebene Aufgabe möglich sein soll, sie so abgefaßt werden muß:

Ein Tagelöhner arbeitete bei einem Gutsbesitzer 12 Tage lang und hatte während dieser Zeit seine Frau und seinen Sohn bei sich, welche täglich eine Ausgabe zum Unterhalt verursachten, er erhielt am Ende der 12 Tage 46 Franken; dann arbeitete er allein nochmals 8 Tage, während welcher Zeit er Frau und Sohn 5 Tage lang bei sich hatte, für deren Unterhalt er wieder täglich einen Aufwand machte; man fragt nun, wie viel der Mann auf den Tag an Lohn verdiente und wie viel die tägliche Ausgabe für die Frau und den Sohn betrug?

Nennt man x den täglichen Gewinn des Tagelöhners

und y die Ausgabe der Frau und des Sohns in derselben Zeit, so werden die Gleichungen der Aufgabe augenscheinlich sein

$$12x - 7y = 46,$$
$$8x - 5y = 30;$$

und wenn sie wie die in §. 56. aufgelöst worden, so werden sie geben

$$x = 5 \text{ Fr.}, \quad y = 2 \text{ F.}$$

§. 59.

In allen den Fällen, in welchen man für die unbekannte Größe eine Zahl mit dem Zeichen — fände, könnte man die Aussage der Aufgabe auf eine ähnliche Art berichtigen, wenn man sorgfältig untersucht, welches die Größe ist, die in der ersten Aussage additiv, in der zweiten Aussage subtractiv werden soll; aber die Algebra dispensirt in diesem Betracht von jeder Untersuchung, wenn man mit den Ausdrücken, die das Zeichen — haben, schicklich zu operiren weiß: denn da diese Ausdrücke aus den Gleichungen der Aufgabe abgeleitet sind, d. h. wenn man sie den in der Gleichung angezeigten Operationen unterwirft, so muß man für die erste Hälfte einen der zweiten Hälfte gleichen Werth haben. Also der aus den Gleichungen gezogene Ausdruck $\frac{-14}{7}$ muß, in Begleitung des Werths $x = 5$, der ebenfalls aus denselben Gleichungen abgeleitet ist, beide prüfen.

Die Substitution des Werths von x giebt sogleich

$$60 + 7y = 46,$$
$$40 + 5y = 30.$$

Es bleibt die Substitution von $\frac{-14}{7}$ in die Stelle von y zu machen; und deshalb muß man diesen Ausdruck mit 7 und mit 5 multipl., mit Berücksichtigung des ihr vorstehenden Zeichen —.

Wendet man die in §. 42. für die Division gegebene Regel der Zeichen an, so wird man haben

$$\frac{-14}{7} = -2;$$

dann, durch die Regel der Zeichen in Betreff der Multipl., wird man erhalten

$$7 \times -2 = -14,$$
$$5 \times -2 = -10.$$

Da die Gleichungen

$$60 + 7y = 46 \quad \text{und} \quad 40 + 5y = 30,$$

respective werden:

$$60 - 14 = 46 \quad \text{und} \quad 40 - 10 = 30,$$

so sind sie geprüft, nicht durch Addition der beiden Theile der ersten Hälfte, sondern durch Subtraction des zweiten Theils von dem ersten, wie man es oben, nach Betrachtung der Form dieser Gleichung gemacht hat.

§. 60.

Die Data der Aufgabe in §. 58. gestatteten nicht die Auflösung im Sinne der ersten Aussage zu machen, d. h. durch Addition, oder daß man als Gewinn das Geld ansehen darf, welches man der Gegenwart der Frau und des Sohnes zuschreibt; die zweite Aussage kommt eben so wenig den Datis der Aufgabe in §. 56. zu.

Wollte man in diesem Falle y ansehen, als wäre es eine Ausgabe, so würden die Gleichungen

$$12x - 7y = 74,$$
$$8x - 5y = 50,$$

die man alsdann hätte, geben

$$x = 5 \quad \text{und} \quad y = \frac{-14}{7};$$

und die Substitution von dem Werth von x änderte sogleich die Gleichungen um in

$$60 - 7y = 74,$$
$$40 - 5y = 50.$$

Die Ungereimtheit von diesen Resultaten ist gerade das Gegentheil von den Resultaten in §. 58., weil hier Reste, größer als die Zahlen 60 und 40, verlangt werden, von denen man die Größen $7y$ und $5y$ abziehen soll.

Das Zeichen — vor dem Ausdruck von y zeigt nicht allein die Ungereimtheit an, sondern hebt sie auch wieder auf; denn nach den Regeln der Zeichen ist

$$\frac{-14}{7} = -2$$

und
$$-7 \times -2 = +14$$
$$-5 \times -2 = +10.$$

Da die Gleichungen

$$60 - 7y = 74, \qquad 40 - 5y = 50,$$

hierdurch werden

$$60 + 14 = 74, \qquad 40 + 10 = 50,$$

so werden sie durch Addition geprüft; und folglich die Größen $-7y$ und $-5y$ in $+14$, $+10$ verwandelt, statt Ausgaben auszudrücken, die dem Tagelöhner zur Last fallen, sind sie für ihn als ein Gewinn betrachtet. Man verfällt also wieder, in diesem Fall, auf die wahre Aussage der Aufgabe.

§. 61.

Durch die vorhergehenden Aufgaben lernt man, daß sich in der Aussage der Aufgaben vom ersten Grade gewisse Widersprüche, welche die Algebra nicht allein kennen lehrt, sondern von welchen sie auch die Berichtigung anzeigt, indem sie gewisse und additiv betrachtete Größen subtractiv nimmt, oder die als subtractiv betrachteten als additiv nimmt, oder indem sie für die unbekannten Werthe mit dem Zeichen — giebt.

So weiß man nun, wie man es verstehen soll, wenn man gewöhnlich sagt, die Werthe mit dem Zeichen —, und

die man negative Auflösungen nennt, lösen die Aufgabe, worin sie vorkommen, in einem der Aussage entgegengesetzten Sinn auf.

Hieraus folgt, daß man Aufgaben, worin die Bedingungen unter sich so verbunden sind, daß die Auflösungen, die den einen Sinn dieser Bedingungen befriedigen, auch durch eine bloße Veränderung der Zeichen, den andern Sinn der Bedingungen befriedigen.

§. 62.

Weil die negativen Größen die Aufgaben, denen sie ihre Entstehung verdanken, in einem gewissen Sinn auflösen, so ist hier der Ort, die negativen Größen etwas näher zu untersuchen, und daraus vorerst die Art und Weise genau zu bestimmen, wie die Rechnung mit ihnen müsse gemacht werden.

Man hat aber schon Gebrauch von den Regeln der Zeichen gemacht, wie solche nämlich für jede der Hauptoperationen waren ausfindig gemacht worden; alle diese Regeln sind nicht für ganz einzelne negative Grß. gefunden worden. Z. B. für die Subtraction hat man angenommen, es sollte von a der Ausdruck $b-c$ abgezogen werden, in welchem vor der negativen Größe $-c$ eine positive Größe b steht. Da, strenge genommen, das Raisonnement nicht von dem Werthe von b abhängt, so findet es auch noch Statt, wenn man $b=0$ hätte, wodurch $b-c$ auf $-c$ reducirt würde; da aber die Theorie der negativen Größen zugleich eine der wichtigsten und dornigsten der Algebra ist, so ist es schicklich sie auf festen Grund zu bauen.

Um diesen Zweck zu erreichen, muß man zum Ursprunge der negativen Größen zurück gehen.

Die größte Subtraction, die man mit einer Größe vornehmen kann, ist, sie von sich selbst zu subtrahiren; in diesem Falle hat man Null als Rest, also: $a-a=0$. Uebertrifft aber die zu subtrahirende Größe die, von der man sie abziehen

soll, so kann man die Subtr. nicht mehr ganz ausführen; man bewirkt nur in der subtrahirten Größe eine Reduction gleich der Größe, von welcher sie abgezogen werden sollte. Z. B. wenn man 5 von 3 abziehen sollte, oder man hätte die Grß. 3—5, zieht man zuerst 3 von 5 ab, so zerlegt man 5 in zwei Theile, 3 und 2, deren successive Subtr. einerlei mit der von 5 ist, und hierdurch, statt 3—5, hat man den gleichgeltenden Ausdruck 3—3—2, welche sich auf —2 reducirt. Das Zeichen — vor 2 zeigt, was es noch bedarf, um damit die Subtr. sich ganz hätte ausführen lassen; so, daß wenn man zu der ersten Größe 2 addirt hätte, man 3+2—5 oder Null gehabt hätte. Man drückt also, vermittelst der algebr. Zeichen, den Begriff aus, den man mit der neg. Größe $-a$ verbinden soll, wenn man die Gleich. $a-a=0$ bildet, oder wenn man die Symbole $a-a$, $b-b$ u. s. w. als der Null gleichgeltend betrachtet.

Hiernach begreift man, daß wenn man zu irgend einer Grß. a das Symbol $b-b$ hinzusetzt, die im Grunde nur Null ist, so ändert man den Werth von dieser Größe nicht, und daß folglich der Ausdruck $a+b-b$ nichts weiter ist, als eine andere Art die Größe a zu schreiben, welches übrigens einleuchtend ist, weil die Glieder $+b$ und $-b$ sich aufheben.

Da man aber durch diese Veränderung der Form in der Zusammensetzung von a die Größe $+b$ und $-b$ hereingebracht hat, so sieht man, daß um irgend eine von diesen Grß. zu subtrah., man sie nur wegzulöschen braucht. Soll $+b$ von a subtrah. werden, so streicht man sie aus, und es bleibt $a-b$, welches mit dem in §. 2. festgestellten übereinstimmt; soll hingegen $-b$ subtrah. werden, so streicht man diese letzte Größe aus, und es bleibt $a+b$, wie man solches aus §. 20. schließen würde.

In Betreff der Multipl. bemerke man, daß das Prod. von $a-a$ mit $+b$ sein muß $ab-ab$, denn da der Multiplicandus gleich Null ist, so muß das Prod. auch Null sein;

und da das erste Glied ab ist, so muß das zweite nothwendig $-ab$ sein, um das erste zu vernichten.

Hieraus wird man schließen, daß $-a$, multiplicirt mit $+b$ geben muß $-ab$.

Multipl. man a mit $b-b$, so hat man noch $ab-ab$, denn da der Multiplicator gleich Null, so muß auch das Prod. gleich Null sein, und muß also das zweite Glied $-ab$ sein, um das erste $+ab$ zu vernichten.

Folglich $+a$ multiplicirt mit $-b$ muß geben $-ab$.

Multipl. man endlich $-a$ mit $b-b$, setzt das erste Glied des Prod. nach dem was vorhergehet, $-ab$, so muß also das zweite Glied $+ab$ sein, weil das Product mit dem Multiplicator zugleich Null sein muß.

Folglich $-a$ multiplicirt mit $-b$ muß geben $+ab$.

Nähert man diese Resultate, so leitet man daraus eben die Regeln wie die in §. 31. ab.

Da nach den eigenen Regeln der Multiplication das Zeichen des Quotienten, verbunden mit dem des Divisors, wieder das Zeichen des Dividendus hervorbringen muß, so schließt man aus dem eben Gesagten, daß die in §. 42. gegebene Regel der Zeichen dem gegenwärtigen Fall zukömmt, **und daß folglich die einnamigen Größen, wenn sie einzeln stehen, sich in Betreff ihrer Zeichen eben so verbinden, als wenn sie Theile von vielnamigen Größen sind.**

§. 63.

Nach diesen Bemerkungen, kann man in allen Fällen, wo man auf neg. Größen stößt, sogleich zu dem eigentlichen Sinn der Aussage der aufgelösten Aufg. zurückgehen, indem man nämlich zu bestimmen sucht, auf welche Art diese Werthe den Gleichungen von der gegebenen Aufg. Genüge leisten; dieses nun wird in dem hier folgenden Beispiel noch mehr bestätigt werden, worin die Zahlen noch von anderer Art als die in §. 56. sind.

§. 64.

Zwei Boten gehen zur nämlichen Zeit von zwei Orten, deren Entfernung gegeben ist, in solcher Richtung gegen einander, daß sie sich begegnen werden. Man weiß, wie viele Kilometer jeder in einer Stunde macht, und fragt, wie viel Wegs ein jeder gemacht habe, wenn sie sich begegnen.

Um die Aufgabe in allen ihren Bedingungen begreiflicher zu machen, habe ich hier eine Figur gezeichnet, wo die durch große Buchst. A und B bezeichneten Puncte die Orte angeben, aus welchen die Boten ausgehen.

A R B

Wie gewöhnlich werde ich durch kleine Buchst. die gegebenen und die unbekannten Größen der Aufg. ausdrücken.

a sei die Entfernung der Abgangsorte *A* und *B*,

b die Anzahl der Kilometer, welche der Bote aus *A* in einer Stunde macht,

c die Anzahl der Kilometer, die der Bote aus *B* in derselben Zeit macht.

Wenn der Buchst. *R* zwischen beide Orte *A* und *B* gesetzt wird, so will ich den Weg *AR*, welchen der erste macht, x, und den Weg *BR*, welchen der zweite macht, y nennen, und da

$$AR + BR = AB,$$

so habe ich die Gleichung

$$x + y = a.$$

Betrachten wir nachgehends, daß die Wege x und y in einerlei Zeit zurückgelegt sind, so wird man bemerken, daß der erste Bote, der in einer Stunde *b* Kilometer macht, den Raum x in einer durch $\frac{x}{b}$ marquirten Zeit durchwandern wird.

Eben so wird der zweite, der c Kilometer in einer Stunde macht, zu dem Weg y eine durch $\frac{y}{c}$ angegebene Zeit gebrauchen; man wird also haben

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Die Gleichungen der Aufgabe sind folglich

$$x + y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Schafft man den Nenner b in der zweiten Gleichung weg, so hat man

$$x = \frac{by}{c};$$

setzt man diesen Werth von x in der ersten Gleichung, so wird diese

$$\frac{by}{c} + y = a,$$

hieraus schließt man

$$by + cy = ac, \quad \text{woraus} \quad y = \frac{ac}{b+c}.$$

Setzen wir wieder den Werth von y in den von x, so erhält man

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b+c} \quad \text{oder} \quad x = \frac{abc}{c(b+c)} \quad (\S.\ 53.)$$

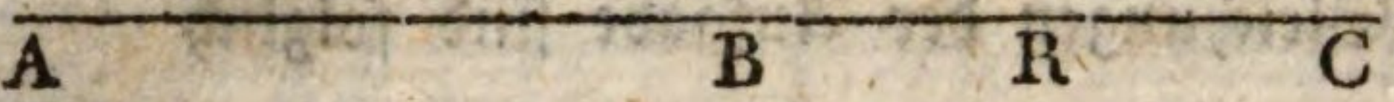
endlich

$$x = \frac{ab}{b+c} \quad (\S.\ 38).$$

Weil hier kein — Zeichen in den Werthen von x und y vorkommt, so ist einleuchtend, daß was man auch für Zahlen statt a, b, c nimmt, so wird man immer für x und y zwei Zahlen mit dem Zeichen + finden. und es wird folglich die gegebene Aufgabe immer genau in dem wahren Sinne ihrer Aussage aufgelöst sein. Man wird in der That leicht begreifen, daß in allen Fällen, in welchen zwei Boten zu gleicher Zeit gegen einander gehen, sie sich begegnen müssen.

§. 65.

Ich nehme jetzt an, daß beide Boten in einerlei Richtung gehen, der von dem Orte *A* ausgeht, läuft hinter dem, der aus dem Orte *B* ausgeht und nach dem Orte *C* zueilt, der in Betreff des Orts *A* über dem Ort *B* hinaus liegt.



Es ist einleuchtend, daß bei dieser Voraussetzung der Bote *A* nur dann *B* einholen kann, in so fern er geschwinder geht als *B*, und der Punct der Begegnung ist nicht mehr zwischen *A* und *B*, sondern in Betreff *A* über *B* hinaus.

Behalten wir dieselben gegebenen Größen wie oben und beobachten das alsdann

$$AR - BR = AB,$$

so hat man

$$x - y = a.$$

Die zweite Gleichung

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

die nur die Gleichheit der von den Boten gebrauchten Zeit anzeigt, um die Wege *AR* und *BR* zu durchlaufen, ändert sich nicht.

Werden die obigen zwei Gleichungen wie die vorhergehenden aufgelöst, so geben sie

$$x = \frac{by}{c},$$

$$\frac{by}{c} - y = a, \qquad by - cy = ac,$$

$$y = \frac{ac}{b-c},$$

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b-c} = \frac{abc}{c(b-c)},$$

und endlich

$$x = \frac{ab}{b-c}.$$

Hier

Hier sind die Werthe von x und y nur so lange positiv, als man b größer denn c nimmt, d. h. daß man voraussetzt, der Bote A gehe geschwinder als der andere B.

Macht man z. B.

$$b = 20, \qquad c = 10,$$

so hat man

$$x = \frac{20a}{20 - 10} = \frac{20a}{10} = 2a,$$

$$y = \frac{10a}{20 - 10} = \frac{10a}{10} = a;$$

woraus hervorgeht, daß der Treffpunct R von A um zweimal AB entfernt liegt.

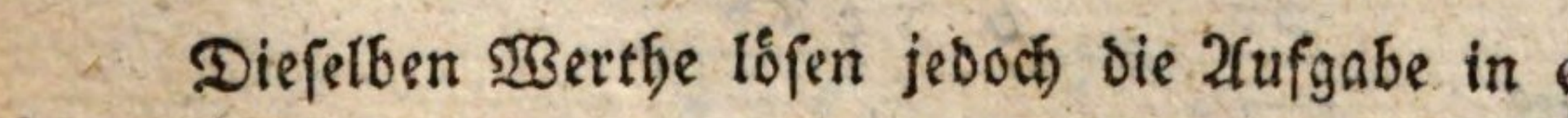
Wenn man nachgehends b kleiner als c annimmt und macht z. B.

$$b = 10, \qquad c = 20,$$

so findet man

$$x = \frac{10a}{10 - 20} = \frac{10a}{-10} = -a,$$

$$y = \frac{20a}{10 - 20} = \frac{20a}{-10} = -2a.$$



Da diese Werthe das Zeichen — haben, so zeigen sie, daß die Aufgabe nicht mehr in dem Sinne ihrer Aussage aufgelöst werden kann; und es ist in der That ungereimt anzunehmen, daß der Bote A, der nur 10 Kilometer in einer Stunde macht, den Boten B, der stündlich 20 Kilom. macht und vor dem ersten voraus ist, jemals einholen könnte.

§. 66.

Dieselben Werthe lösen jedoch die Aufgabe in einem gewissen Sinne auf; denn setzt man sie in die Gleichungen

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

so hat man nach den Regeln der Zeichen

$$-a+2a=a$$

$$-\frac{a}{10}=-\frac{2a}{20}.$$

Offenbar sind diese beiden Gleichungen richtig, denn wenn die vorfallenden Reductionen ausgeführt werden, so wird die erste Hälfte der zweiten gleich; zieht man nun die Zeichen der Glieder, woraus die erste Gleichung besteht, in Betracht, so wird man sehen, wie man die Aussage der Aufgabe ermäßigen muß, um die Ungereimtheit daraus zu entfernen.

In der That ist es der Weg a, (der corresp. zu x und von dem ersten Boten durchlaufen) der wirklich von dem Wege $2a$ (der corresp. zu y und von dem zweiten Boten durchlaufen) abgegangen ist; und es ist also eben so, als hätte man y mit x und x mit y vertauscht, und als hätte man angenommen, der Bote B sei der Nachfolgende.

Diese Veränderung in der Aussage veranlaßt auch eine in der Richtung der Wege der beiden Boten; sie gehen nun nicht mehr gegen C hin, sondern nach der entgegengesetzten Seite, nach C' zu, wie es die folgende Figur zeigt:

und ihr Zusammentreffen geschieht in R'. Es folgt hieraus

$$BR'-AR'=AB,$$

welches giebt

$$y-x=a;$$

man hat übrigens immer

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c},$$

und findet

$$x=\frac{ab}{c-b}=\frac{10a}{20-10}=a,$$

$$y=\frac{ac}{c-b}=\frac{20a}{20-10}=2a:$$

positive Werthe, welche die Aufgabe in dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage auflösen.

§. 67.

Diese Aufgabe bietet einen Fall dar, in welchem sie völlig absurd ist, nämlich wenn man annimmt, beide Boten gehen gleich geschwind. So wird klar, daß sich die Boten niemals begegnen können, weil sie immer um die Weite der Orte, von welchen sie abgereiset, von einander entfernt bleiben. Diese Ungereimtheit, die durch keine andere Ermäßigung der Aussage aufgehoben werden kann, zeigt sich ganz auffallend in den Gleichungen.

Man hat alsdann $b=c$, weil nun bei gleicher Geschwindigkeit die Boten gleiche Wege in einer Stunde zurücklegen, so wird die Gleichung

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$$

zu

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b}$$

und giebt

$$x=y.$$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung $x-y=a$ in

$$x-x=a, \quad \text{oder} \quad 0=a,$$

ein sehr ungereimtes Resultat, weil eine Größe a, deren Größe gegeben ist, Null sein soll.

§. 68.

Diese Ungereimtheit zeigt sich auf eine ganz eigene Art in den Werthen der Unbekannten

$$x=\frac{ab}{b-c}, \qquad y=\frac{ac}{b-c};$$

ihr Nenner $b-c$, der 0 wird, wenn $b=c$, so hat man

$$x=\frac{ab}{0}, \qquad y=\frac{ac}{0}.$$

Es ist nicht sogleich zu begreifen, was der Quotient von

Stadtl. Bibliothek Passau

einer Division sei, wenn der Divisor Null ist; man sieht nur, daß wenn man b dem c sehr nahe nimmt, die Werthe von x und von y sehr groß würden. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur nehmen

$$b = 6 \text{ Kilom.}, \qquad c = 5,8 \text{ Kilom.},$$

so hat man

$$x = \frac{6a}{0,2} = 30a,$$

$$y = \frac{5,8a}{0,2} = 29a;$$

man gehe nun über, zu

$$b = 6, \qquad c = 5,9,$$

so hat man

$$x = \frac{6a}{0,1} = 60a,$$

$$y = \frac{5,9a}{0,1} = 59a;$$

man mache noch

$$b = 6, \qquad c = 5{\cdot}99,$$

so kommt

$$x = \frac{6a}{0,01} = 600a,$$

$$y = \frac{5,99a}{0,01} = 599a;$$

es ist leicht einzusehen, daß der Divisor eben so abnimmt, als die Differenz zwischen den Zahlen b und c kleiner gemacht wird, daß man also nach und nach um so größere Quotienten erhält.

Wie klein aber auch eine Größe sein mag, so kann sie demungeachtet niemals für Null genommen werden; es folgt hieraus, daß so wenig unterschieden man auch die durch die Buchst. b und c vorgestellten Zahlen annahm, und wie immer größer folglich die entstehenden Werthe von x und y waren, so wird man doch niemals diejenigen erreichen, die dem Fall, wo $b = c$ ist, entsprechen.

Da diese leßtern durch keine Zahl vorgestellt werden können, wie groß man sie auch annimmt, so nennt man sie unendliche; und jeder Ausdruck von der Form $\frac{m}{0}$, deren Nenner Null ist, ist als das Symbol des Unendlichen angesehen.

Dieses Beispiel zeigt, daß das mathematische Unendliche ein negativer Begriff ist, weil man dazu nur durch die Unmöglichkeit kommt, eine Größe anzugeben, welche die Aufgabe auflösen konnte.

Man könnte hier fragen, wie die Werthe

$$x = \frac{ab}{0} \qquad y = \frac{ac}{0}$$

die gegebenen Gleichungen befriedigen; denn dieses ist eine wesentliche Eigenschaft der Algebra, daß die Symbole von den Werthen der unbekannten Größen, was sie auch immer sein mögen, wenn sie den mit diesen unbekannten angezeigten Operationen unterworfen werden, die Gleichungen der Aufgabe befriedigen.

Wenn man sie in die Gleichungen substituirt

$$x - y = a,$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

die dem Fall, wo $b = c$ ist, angehören, so hat man durch die erste

$$\frac{ab}{0} = \frac{ab}{6} = a,$$

oder $\frac{ab - ab}{0} = a$, oder $ab - ab = a \times 0$,

oder endlich

$$0 = 0, \quad \text{weil} \quad a \times 0 = 0.$$

Die zweite gegebene Gleichung, unter denselben Umständen

$$\frac{ab}{0 \times b} = \frac{ab}{0 \times b};$$

da beide Hälften von jeder Gleichung gleich werden, so sind diese Gleichungen befriedigt.

Es bleibt noch zu erklären übrig, wie der durch den Ausdruck $\frac{ab}{0}$ angezeigte Begriff, die Ungereimtheit des in §. 67. gefundenen Resultats verbessert. Dieserwegen dividirt man durch x die beiden Seiten der Gleichung

$$x - y = a;$$

so hat man

$$1 - \frac{x}{y} = \frac{a}{x};$$

und da die Gleichung

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$$

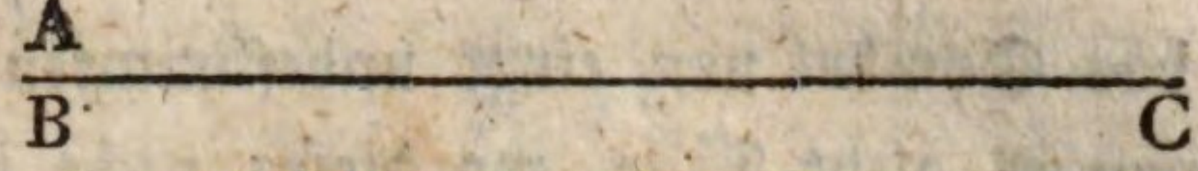
$x = y$ giebt, so wird die erstere

$$1 - 1 = \frac{a}{x} \quad \text{oder} \quad 0 = \frac{a}{x}.$$

Der Fehler bestehet hier in der Größe $\frac{a}{x}$, um welche die zweite Hälfte die erstere übertrifft; dieser Fehler wird aber um so kleiner, je nachdem man für x eine größere Zahl nimmt. Mit Recht giebt also die Algebra für x einen Ausdruck, den keine Zahl, wie groß sie auch immer sei, darstellen kann, der aber, da er nach denen kommt, die immer größere und größere Zahlen vorstellen, anzeigt, in welchem Sinn man den Fehler der Annahme mehr und mehr verringern kann.

§. 69.

Wenn die beiden Boten nicht nur gleich geschwind und in einerlei Richtung gehen, sondern auch von einem einzigen Orte aus, ihren Weg antreten, so ist der Treffort kein besonderer mehr, denn sie sind ja in dieser ganzen Wegesstrecke beisammen. Es ist erforderlich zu sehen, wie dieser Umstand durch die Werthe, welche die unbekannten x und y in diesem Falle nehmen, vorgestellt ist.



Da der Ort *A* und *B* hier in einem einzigen Puncte angenommen worden, so ist in diesem Falle $a=0$, und immer $b=c$; es kommt also

$$x=\frac{0\,.\,b}{0}=\frac{0}{0}, \qquad y=\frac{0\,.\,c}{0}=\frac{0}{0}.$$

Um diese Werthe auszulegen, die eine Division anzeigen, in welchen der Dividendus und der Divisor beide Null sind, gehe ich zu den Gleichungen der Aufgabe zurück. Die erste, die

$$x-y=0 \text{ wird, giebt } x=y;$$

und substituirt man diesen Werth in der zweiten Gleichung, die alsdann ist

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b}, \text{ so kommt } \frac{y}{b}=\frac{y}{b}$$

Da beide Seiten der letzten Gleichung **identisch** sind, d. h. aus denselben Gliedern, mit denselben Zeichen genommen, bestehen, und völlig Genüge geleistet, man mag auch dem y einen Werth geben welchen man will, so wird man doch den Werth der unbekannten Größe nicht bestimmen können. Es ist übrigens einleuchtend, daß die Gleichung

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b} \text{ wird } x=y,$$

und folglich nichts mehr ausdrückt als die erste *). Es gehet nur aus der einen und der andern hervor, daß die zwei Boten immer zusammen sein werden, weil die Entfernungen x und y beide von einerlei Ort *A* ausgehen und gleich sind, ihr Werth bleibt übrigens unbestimmt. Der Ausdruck $\frac{0}{0}$

*) Um den Vortrag abzukürzen, wenden die Analysten, auf die Gleichungen selbst, den Beinamen identisch an.

$\frac{y}{b}=\frac{y}{b}$ ist eine identische Gleich., $5-3x=5-3x$ ist eine andere; und wenn zwei Gleich. nur einerlei ausdrücken, so sagt man auch, daß diese Gleichungen identisch sind.

ist hier also das Symbol von einer unbestimmten Größe: ich sage hier, denn es giebt Fälle, wo dieses nicht ist; alsdann hat aber der gegebene Ausdruck, nicht denselben Ursprung als der vorhergehende.

§. 70.

Um davon ein Beispiel zu geben, so sei

$$\frac{a\,(a^2 - b^2)}{b\,(a - b)}.$$

Diese Größe wird, in ihrer gegenwärtigen Form, $\frac{0}{0}$, wenn man $a = b$ macht; reducirt man sie aber gleich auf ihren einfachsten Ausdruck, indem man den gemeinsch. Fact. $a - b$ des Zählers und Nenners fortläßt, so findet man

$$\frac{a\,(a + b)}{b},$$

welches $2a$ giebt, wenn $a = b$.

Es verhält sich nicht so mit den im vorigen §. gefundenen Werthen von x und y; denn sie lassen sich nicht auf einen einfachern Ausdruck reduciren.

Aus dem Gesagten folgt, daß wenn uns ein Ausdruck aufstößt, der $\frac{0}{0}$ wird, so muß man, bevor man über seinen Werth sich ausspricht, untersuchen, ob der Zähler und Nenner nicht irgend einen gemeinsch. Fact. haben, der wenn er Null wird, beide Glieder zugleich gleich Null macht, und wenn man ihn wegläßt, den wahren Werth des gegebenen Ausdrucks erhält. Es giebt jedoch Fälle, welche sich dieser Methode entziehen könnten; aber die Gränzen dieses Werks erlauben mir nur dieser **analytischen** Thatsache zu erwähnen. Wenn man die Differentialrechnung abhandelt, so lehrt man das allgemeine Verfahren den wahren Werth der Größen, die $\frac{0}{0}$ werden, zu finden *).

---

*) Man sehe den Traité du Calcul différentiel et intégral, *Tom. I.* oder den Traité élémentaire über denselben Gegenstand.

§. 71.

Das Vorhergehende zeigt sehr deutlich, daß die algebr. Auflösungen entweder vollständig die Aussage der Aufgabe, wenn sie möglich ist, erfüllen, oder zeigen eine in der Aussage zu machende Modification an, wenn die gegebenen Bedingungen Widersprüche zeigen, die gehoben werden können, oder lassen endlich eine absolute Unmöglichkeit erkennen, wenn es gar kein Mittel giebt, mit den nämlichen gegebenen Bedingungen eine der gegebenen in einem gewissen Sinne ähnliche Aufgabe zu lösen.

§. 72.

Man muß in der Auflösung der verschiedenen Fälle, der vorhergehenden Aufgabe, bemerken, daß die Veränderung des Zeichens der unbekannten x und y, eine Veränderung in der Richtung der Wege, welche diese unbekannten vorstellen, bedeute. Wenn der unbekannte Weg y, von B gegen A gerichtet, genommen worden, so hatte er in der Gleichung

$$x + y = a,$$

das Zeichen $+$, und er erhält das Zeichen $-$ im zweiten Falle, wenn man ihn auf der entgegengesetzten Seite von B gegen C nimmt (§. 65.), weil man in der ersten Gleichung hatte

$$x - y = a.$$

Bringt man in der zweiten Gleichung

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

diese Veränderung der Zeichen an, so fände man

$$\frac{x}{b} = \frac{-y}{c},$$

dieses ist nicht das Resultat, welches in dem oben erwähnten §. 65. Statt hatte. Aber man muß bemerken, daß der Weg y sich zusammensetzt aus Vielfachen der Länge c,

welche der aus B abgegangene Bote in einer Stunde durchgeht, und da diese Länge c in der nämlicher Richtung wie y liegt, so muß man sich auch bei ihr dasselbe Zeichen denken, und folglich das Zeichen — nehmen, wenn man es y giebt; dieses aber bringt die gedachte Gleichung auf

$$\frac{x}{b} = \frac{-y}{-c} \text{ oder } \frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Es bedarf also nur einer bloßen Untersuchung der Zeichen, um den zweiten Fall der Aufgabe in dem ersten mit zu begreifen; und so giebt die Algebra zugleich die Auflösung von mehreren ähnlichen Aufgaben.

Die Aufgabe in §. 15. giebt davon ein sehr einleuchtendes Beispiel. Man hatte nämlich dort angenommen, daß der Vater dem Sohne eine Summe d zu geben schuldig sei; wollte man die Aufgabe in die entgegengesetzte Hypothese auflösen, d. h. annehmen, daß der Sohn dem Vater eine Summe d schuldig sei, so bedarf es bloß einer Umänderung des Zeichen von d, in dem Werthe von x, und man wird haben

$$x = \frac{bc - d}{a + b}.$$

Wenn man endlich annähme, daß keiner dem andern etwas schuldig sei, so muß man $d = 0$ setzen, und es kommt

$$x = \frac{bc}{a + b}.$$

Nichts ist leichter, als die Probe von diesen beiden Auflösungen zu machen, man braucht nur die Aufgabe von neuem für jeden der gedachten Fälle, in Gleichungen auszudrücken.

§. 73.

Nur, um die Analogie zwischen den Aufgaben in §. 56 und 64 beizubehalten, habe ich in der zweiten zwei unbekannte gebraucht. Man hätte aber sowohl die eine als die andere, mittelst einer einzigen unbekannten Größe auflösen

können; denn wenn man sagt, der Mann habe 74 Franken für 12 seiner Arbeitstage und für 7 Arbeitstage seiner Frau und seines Sohns zusammen, erhalten, so folgt, daß wenn man den Tagelohn der Frau und des Sohns zusammen y nennt, und $7y$ von 74 Franken abzieht, so bleibt $74-7y$ für 12 Arbeitstage des Mannes, woraus folgt, daß er täglich verdient $\frac{74-7y}{12}$ Fr.

In der zweiten Arbeitszeit verdient er täglich $\frac{50-5y}{8}$.

Setzt man diese zwei Größen gleich, so bildet man die Gleichung

$$\frac{74-7y}{12}=\frac{50-5y}{8}.$$

Eben so in der Aufgabe §. 64.

A R B

Wenn x den Weg AR, welchen der aus A abgehende Bote macht, bezeichnet, so ist $BR=a-x$ der Weg des aus B gegen A reisenden Boten; aber diese Wege sind von den Boten, die respect. b und c Kilometer in einer Stunde machen, in einer und der nämlichen Zeit zurückgelegt worden, man hat also

$$\frac{x}{b}=\frac{a-x}{c},$$

woraus

$$cx=ab-bx,$$

$$x=\frac{ab}{b+c}.$$

Der Unterschied zwischen den so eben gemachten Auflösungen und denen in §. 56. und 64. bestehet bloß darin, daß man die erste Gleichung, nur mittelst der gewöhnlichen Wortsprache gebildet und aufgelöst hat, ohne darin die algebr. Schreibart zu gebrauchen, und es leuchtet ein, daß je weiter man den Gebrauch des erstern Verfahrens treibt, um so weniger bleibt mit dem zweiten zu machen übrig.

§. 74.

Oefters setzt man der Aufgabe in §. 64. einen Umstand zu, wodurch sie nicht schwieriger wird.

A R C B

Man nimmt an, daß der aus B abgehende Bote, um d Stunden früher, als der aus A ausgeht.

Es ist einleuchtend; daß dieses darauf hinaus läuft, den Abgangsort des ersten zu ändern; denn wenn er stündlich c Kilom. macht, so durchläuft er den Weg $BC=cd$ in d Stunden und wird sich in C befinden, wenn der andere Bote aus A ausgeht; dergestalt wird die Entfernung der Anfangsörter sein

$$AC=AB-BC=a-cd.$$

Schreibt man also $a-cd$ in der Stelle von a, in der Gleichung des vorhergehenden §., so hat man

$$\frac{x}{b}=\frac{a-cd-x}{c},$$

$$x=\frac{ab-bcd}{b+c}.$$

Wenn die Boten in der nämlichen Richtung gehen

A B C R

so würde die Entfernung der Abgangsörter sein:

$$AC=AB+BC=a+cd;$$

der vom ersten Boten aus A durchlaufene Weg wird sein AR, während daß der Weg des andern Boten sein würde

$$CR=AR-AC:$$

man würde also haben

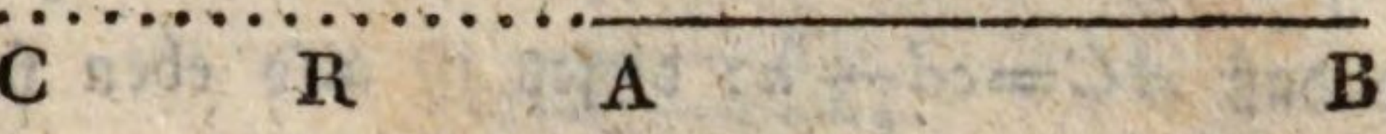
$$\frac{x}{b}=\frac{x-a-cd}{c},$$

woraus

$$x=\frac{ab+bcd}{b-c}.$$

§. 75.

So vorgetragen, liefert die Aufgabe einen Fall, wo die Auslegung des für x gefundenen negativen Werths einige Schwierigkeit darbietet; läßt man nämlich die Boten in entgegengesetzter Richtung gehen, so giebt man der Zahl d einen solchen Werth, daß der durch cd vorgestellte Weg BC, größer als $a = AB$ wird.



Alsdann befindet sich der aus B ausgegangene in C auf der andern Seite von A, in dem Augenblick, wo man diesen hier gegen B abreisen läßt; es ist also eine Ungereimtheit anzunehmen, daß die beiden sich begegnen könnten.

Hätte man z. B.

$a = 400$ Kilom., $b = 12$ Kilom., $c = 8$ Kilom., $d = 60$ Stund., so entsteht hieraus $cd = 480$ Kilom., der Ort C wäre also 80 Kilom. jenseits des Orts A in Bezug auf den Ort B; man fände aber alsdann

$$x = \frac{400 . 12 - 60 . 8 . 12}{8 + 12} = \frac{400 . 3 - 60 . 2 . 12}{2 + 3}$$

$$= \frac{1200 - 1440}{5} = -\frac{240}{5} = -48.$$

Die Begegnung der Boten fände also in einem Orte R statt, der um 48 Kilom. auf der andern Seite von A, aber zwischen A und C läge, obgleich es scheint, daß der aus B gehende Bote, der immer seinen Weg über C hinaus fortsetzen soll, nicht eher von dem andern eingeholt werden könnte, als bis er über diesen Ort hinaus wäre.

Um die in diesem Falle aufgelöste Aufgabe zu kennen, muß man statt x die negative Zahl $-m$ in der Gleichung setzen, die alsdann wird

$$-\frac{m}{b} = \frac{a - cd + m}{c},$$

oder, indem man die Zeichen auf beiden Seiten ändert,

$$\frac{m}{b} = \frac{cd - a - m}{c}.$$

Man sieht, daß der von dem aus B gehenden Boten durchlaufene Weg $cd - a - m$ ist, oder was von

C R A B

BC übrig bleibt, wenn man AB und AR abzieht, d. h. CR, und daß $AC = cd - a$: dieses ist also eben so viel, als wenn der zweite Bote hätte unmittelbar aus dem Orte C ausgehen sollen, wo er sich zur Zeit der Abreise des ersten befindet; da sie aber in entgegengesetzter Richtung gehen, so müssen sie sich nothwendig zwischen A und C begegnen. Dieser Fall wird also der erste von den in §. 74, wo es hinreicht $a - cd$ in $cd - a$ umzuändern, um den Werth zu erhalten, den m nach der obigen Gleichung hätte. (Siehe die Note am Ende des Bandes.)

§. 76.

Die Aufgabe in §. 56. verallgemeinert, läßt sich wie folgt ausdrücken:

Ein Tagelöhner arbeitete in einem Hause während a Tage, und hatte bei sich zu Gehülfen, seine Frau und seinen Sohn, während b Tage, und erhielt dafür c Franken. Ein andermal arbeitete er im nämlichen Tagelohn d Tage, und hatte jetzt Frau und Sohn e Tage bei sich, und erhielt für diesesmal f Franken; man fragt: wie viel er und wie viel Frau und Sohn täglich verdienten?

Es sei immer x der Tagelohn des Mannes und y der für Frau und Sohn:

für eine Anzahl von a Tage hätte er ax,

für eine Anzahl von b Tage hätten seine Frau und Sohn by, also

$$ax + by = c;$$

für eine Anzahl von d Tage hätte er dx,
für eine Anzahl von e Tage hätten seine Frau und Sohn ey, also

$$dx + ey = f:$$

dieses sind die zwei allgemeinen Gleichungen der Aufgabe.

Aus der ersten zieht man

$$x = \frac{c - by}{a};$$

multipliciren wir diesen Werth mit d, um ihn in der Stelle von x in der zweiten Gleichung zu setzen, so wird man haben

$$dx = \frac{cd - bdy}{a},$$

und folglich

$$\frac{cd - bdy}{a} + ey = f.$$

Schaffen wir aus dieser Gleichung die Nenner weg, so erhält man

$$cd - bdy + aey = af,$$

woraus man nach und nach schließt

$$aey - bdy = af - cd,$$

$$y = \frac{af - ed}{ae - bd}.$$

Setzen wir den nun bekannten Werth von y in den von x, so wird diese letztere bekannt sein; man wird haben

$$x = \frac{c - b\dfrac{af - cd}{ae - bd}}{a}.$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, muß man zuerst die angezeigte Multiplication mit den Größen

$$b \text{ und } \frac{af - cd}{ae - bd}, \quad (\S.\ 53.)$$

ausführen, welches giebt

$$x = \frac{c - \frac{abf - bcd}{ae - bd}}{a};$$

reduciren wir nun c auf den Nenner des sie begleitenden Bruchs, und vollführen die Subtraction (§. 51.), so kommt

$$x = \frac{\frac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}}{a},$$

oder wenn wir reduciren,

$$x = \frac{\frac{ace - abf}{ae - bd}}{a}\ *).$$

Führen wir die Division mit a aus (§. 53), so wird man finden

$$x = \frac{ace - abf}{a^2 e - abd},$$

und lassen wir den Zähler und Nenner des gemeinschaftlichen Factors a weg, (§. 38.), so wird man endlich haben

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Die

*) Damit kein Zweifel über den Sinn dieses Ausdrucks bleibt, muß man auf den Divisionsstrich achten, der in dem Kern der Zeile liegt. So, in dem Ausdruck $x = \frac{A}{B}$, stellt A den Dividendus vor, er sei eine Ganze oder eine Bruchzahl, und B der Divisorin der einen oder der andern Hypothese.

Nach dieser Uebereinkunft, bedeutet der Ausdruck $x = \frac{\frac{A}{C}}{B}$, daß x gleich ist dem Quotienten des Bruchs $\frac{A}{C}$ dividirt durch B, und der Ausdruck $x = \frac{A}{\frac{B}{C}}$ zeigt für x den Quotienten von A, dividirt durch den Bruch $\frac{B}{C}$; endlich hat man, durch den Ausdruck $x = \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}}$ den Quotienten des Bruchs $\frac{A}{C}$, dividirt durch den Bruch $\frac{B}{D}$.

Diese Bemerkungen zeigen die Nothwendigkeit, die Linien dem Resultate, welches man anzeigen will, gemäß zu setzen.

Die Werthe

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd'} \qquad y = \frac{af - cd}{ae - bd'}$$

werden eben so gebraucht, als die oben gefundenen, für die Buchstabengleichungen mit einer unbekannten Größe: man substituirt darin, statt der Buchstaben, die dem gewählten Beispiele zugehörigen Zahlen.

Man wird die Resultate aus §. 56. erhalten, wenn wir setzen

$a = 12,$ $b = 7,$ $c = 74,$
$d = 8,$ $e = 5,$ $f = 50,$

und die aus §. 58, indem man setzt

$a = 12,$ $b = 7,$ $c = 46,$
$d = 8,$ $e = 5,$ $f = 30.$

§. 77.

Die Werthe von a und von y, kommen der gegebenen Aufgabe nicht allein zu, sie erstrecken sich auch auf alle die, welche zu zwei Gleichungen vom ersten Grade, mit zwei unbekannten führen, denn es ist sichtbar, daß diese Gleichungen nothwendig in den Formeln

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

enthalten sind, wenn wir nur unter den Buchstaben a, b, d und e die Sammlung der gegebenen Größen, welche respective die unbekannten x und y multipliciren, verstehen, und und unter den Buchstaben c und f, die Sammlung der ganz bekannten Glieder, die nach der zweiten Seite versetzt werden.

Ueber die Auflösung jeglicher Anzahl von Gleichungen des ersten Grades, welche eben so viele unbekannte Größen enthalten.

§. 78.

Wenn eine Aufgabe so viel unterschiedene Bedingungen hat, als sie unbekannte Größen enthält, so gewährt jede von diesen Bedingungen eine Gleichung, in welcher gewöhnlich alle unbekannten Größen verschiedentlich unter sich, und mit bekannten Größen verbunden oder vermengt sind, wie man dieses in den Aufgaben mit zwei unbekannten Größen schon gesehen hat; allein wenn die unbekannten Größen nur vom ersten Grade sind, so kann man, wie es im vorhergehenden §. geschehen, **aus einer der Gleichungen den Werth von einer der unbekannten Größen suchen, so, als wenn alles Uebrige bekannt wäre, und diesen Werth in allen andern Gleichungen substituiren, die alsdann nur noch die übrigen unbekannten Größen enthalten werden.**

Das Verfahren, wodurch man eine unbekannte Größe aus den Gleichungen wegschafft, heißt **Elimination**. Dieses Mittel angewandt, bringt z. B. drei Gleichungen, mit drei unbekannten Größen, zuerst auf zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, die man, wie oben geschehen, behandelt, und wenn man die Werthe der zwei letzten unbekannten Größen erhalten hat, so substituirt man sie in den Ausdruck der ersten.

Hat man eine Gleichung mit vier unbekannten Größen, so leitet man daraus zuerst drei Gleichungen mit drei unbekannten Größen ab, welche man, wie oben gesagt, behandelt; wenn man nachgehends die Werthe der drei unbekannten Größen gefunden hat, so substituirt man sie in den Ausdruck der ersten, und so fort.

Die hier folgende Aufgabe enthält drei unbekannte Zahlen und drei Gleichungen.

§. 79.

Man kauft einzeln drei Getreideladungen, die erste welche 30 Scheffel Roggen, 20 Scheffel Gerste und 10 Scheffel Weitzen enthielt, kostete 230 Franken.

Die zweite Ladung, welche 15 Scheffel Roggen, 6 Scheffel Gerste und 12 Scheffel Weitzen enthielt, kostete 138 Franken.

Die dritte Ladung, welche 10 Scheffel Roggen, 5 Scheffel Gerste und 4 Scheffel Weitzen enthielt, kostete 75 Franken.

Wie viel hat der Scheffel Roggen, Gerste und Weitzen gekostet?

Es sei x der Preis von einem Scheffel Roggen,

y = = = = = = = = = Gerste,

z = = = = = = = = = Weitzen.

Um die erste Bedingung zu erfüllen, bemerkt man, daß

30 Scheffel Roggen, gelten $30x$,

20 = = = Gerste, = = = $20y$,

10 = = = Weitzen, = = = $10z$;

und da das Ganze 230 Franks betragen soll, so wird man die Gleichung haben,

$$30x + 20y + 10z = 230:$$

Für die zweite Bedingung wird man haben

15 Scheffel Roggen, welche gelten $15x$,

6 = = = Gerste, = = = = = = $6y$,

12 = = = Weitzen, = = = = = = $12z$,

und folglich

$$15x + 6y + 12z = 138:$$

Für die dritte Bedingung wird man haben,

10 Scheffel Roggen, die gelten $10x$,

5 = = = Gerste, = = = = $5y$,

4 = = = Weitzen, = = = = $4z$,

und folglich

$$10x + 5y + 4z = 76.$$

Die vorgelegte Aufgabe ist also zurückgebracht auf die drei Gleichungen,

$$30x+20y+10z=230,$$
$$15x+6y+12z=138,$$
$$10x+5y+4z=75.$$

Bevor ich die Auflösung davon unternehme, untersuche ich, ob es nicht möglich sei, sie zu vereinfachen, indem man die beiden Seiten von irgend einer dieser Gleichung durch einerlei Zahl dividirt (§. 12); und ich sehe, daß man alle Glieder der ersten durch 10, und alle die der zweiten durch 3 dividiren kann; führen wir diese Divisionen aus, so habe ich mich nur noch mit den Gleichungen

$$3x+2y+4z=23,$$
$$5x+2y+4z=46,$$
$$10x+5y+4z=75,$$

zu beschäftigen.

Da wir irgend eine der unbekannten wählen können, um ihren Werth zu ziehen, so nehme ich den von z in der ersten Gleichung; denn da diese unbekannte keinen Coefficienten hat, so wird ihr Werth eine Größe ohne Divisor, oder eine ganze Zahl sein; es kommt

$$z=23-3x-2y.$$

Setzen wir diesen Werth in die zweite und dritte Gleichung, so verwandelt man sie in

$$5x+2y+92-12x-8y=46,$$
$$10x+5y+92-12x-8y=76;$$

und reduciren wir ihre erste Seite, so findet man

$$92-7x-6y=46,$$
$$92-2x-3y=75.$$

Um diese Gleichungen zu behandeln, die nur noch zwei unbekannte enthalten, so nehme ich in der ersten, den Werth der unbekannten y, und erhalte

$$y=\frac{92-46-7x}{6}, \text{ oder } y=\frac{46-7x}{6},$$

und durch Subſtitution dieſes Werths wird die zweite Gleichung

$$92 - 2x - 3 \times \frac{46 - 7x}{6} = 75.$$

Den Nenner 6 könnte ich, nach der gewöhnlichen Methode, fortſchaffen, allein ich bemerke, daß, da dieſer Nenner durch 3 theilbar iſt, er ſich durch die Multiplication des Bruchs $\frac{46 - 7x}{6}$ mit 3 vereinfachen läßt, dem §. 54. der Arithmetik gemäß; hierdurch habe ich

$$92 - 2x - \frac{46 - 7x}{2} = 75.$$

Schafft man nun den Nenner 2 weg, ſo finde ich,

$$184 - 4x - 46 + 7x = 150;$$

wenn die erſte Seite reducirt wird, ſo kommt

$$138 + 3x = 150,$$

woraus man ſchließt

$$x = \frac{150 - 138}{3} = \frac{12}{3}, \text{ oder } x = 4.$$

Die Subſtitution dieſes Werths, in dem Ausdruck von y giebt

$$y = \frac{46 - 7 \times 4}{6} = \frac{46 - 28}{6} = \frac{18}{6}, \text{ oder } y = 3;$$

und durch die Subſtitution der Werthe von x und von y, in dem Ausdruck von z, erhält man

$$z = 23 - 3 \times 4 - 2 \times 3 = 23 - 12 - 6, \text{ oder } z = 5.$$

Hieraus folgt, daß gegolten haben

der Scheffel Roggen 4 Franken,
= = = Gerſte 3 = = =
= = = Weitzen 5 = = =.

Dieſes Beiſpiel, welches die Anwendung der Methode des vorhergehenden §. zeigt, iſt zugleich beachtenswerth, wegen der darin angebrachten Rechnungsverkürzungen.

§. 80.

Ich will noch folgende Aufgabe auflösen:

Ein Mann übernahm es, Porzellangefäße, von dreierlei Größe, unter folgenden Bedingungen zu überbringen, daß er für jedes Gefäß, welches er zerbräche, so viel zur Entschädigung bezahle, als er für den Transport, eines von der nämlichen Gattung, wovon das zerbrochene sei, an Traglohn erhalte.

Man gab ihm das erstemal 2 kleine, 4 mittlere und 9 große Gefäße; er zerbrach die mittlern, und überbrachte die andern ganz, und erhielt noch 28 Franken.

Das zweitemal gab man ihm 7 kleine, 3 mittlere und 5 große Gefäße; diesesmal zerbrach er die 5 großen, und überbrachte die übrigen unbeschädigt, und erhielt 3 Franken.

Das drittemal gab man ihm 9 kleine, 10 mittlere und 11 große Gefäße; er zerbrach die letzten, und brachte die andern unverletzt, erhielt aber nur 4 Franken.

Man fragt: wie viel Traglohn für ein Gefäß von jeder Gattung bezahlt wurde?

Es sei x der Traglohn für ein kleines Gefäß,

y = = = = = = = mittleres = =

z = = = = = = = großes = =

Es ist sichtbar, daß die jedesmalige Summe, welche der Träger erhielt, der Ueberschuß von dem war, was er, nach Abzug des Werthes für die zerbrochenen, noch an Traglohn für die überlieferten herausbekam; nach dieser Bemerkung liefern die drei Bedingungen der Aufgabe respective die Gleichungen

$$2x - 4y + 9z = 28,$$
$$7x + 3y - 5z = 3,$$
$$9x + 10y - 11z = 4,$$

Die erste von diesen Gleichungen, giebt

$$x = \frac{28 + 4y - 9z}{2};$$

und durch die Substitution dieses Werths, werden die zweite und dritte Gleichung

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3,$$

$$\frac{252 + 36y - 81z}{2} + 10y - 11z = 4.$$

Schafft man die Nenner weg, so wird man haben

$$196 + 28y - 63z + 6y - 10z = 6,$$

$$252 + 36y - 81z + 20y - 22z = 8;$$

reducirt man die erste Seite, so wird man erhalten

$$196 + 34y - 73z = 6,$$

$$252 + 56y - 103z = 8;$$

nimmt man den Werth von y aus der ersten von diesen Gleichungen, so wird man haben

$$y = \frac{73z - 190}{34}.$$

Durch diesen Werth wird die zweite

$$252 + 56 \times \frac{73z - 190}{34} - 103z = 8;$$

nachdem sie von dem Nenner 34 befreiet wird, so verwandelt sie sich in

$$34 \times 252 + 56 \times 73z - 56 \times 190 - 34 \times 103z = 34 \times 8,$$

oder in

$$8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272.$$

Die Reduction der ersten Hälfte von diesen Resultaten, führt zu

$$586z - 2072 = 272,$$

woraus man zieht:

$$z = \frac{2344}{586}, \text{ oder } z = 4.$$

Gehn wir von dem Werthe von z zu dem von y zurück, so haben wir

$$y = \frac{73 \times 4 - 190}{54} = \frac{292 - 190}{34} = \frac{102}{34}, \text{ oder } y = 3;$$

und mit diesen zwei Werthen, finden wir

$$x = \frac{28 + 4 \times 3 - 9 \times 4}{2} = \frac{28 + 12 - 36}{2} = \frac{4}{2}, \text{ oder } x = 2.$$

Man hat also bezahlt

2 Franken für den Transport eines kleinen Gefäßes,
3 = = = = = = = = mittlern = =
4 = = = = = = = = großen = =.

Dieses Beispiel genügt, um zu zeigen, wie man in jedem andern ähnlichen Falle verfahren muß.

§. 81.

Es geschiehet zuweilen, daß nicht alle unbekannten Größen sich zugleich in jeder Gleichung finden; dieser Umstand ändert die Methode des Eliminirens nicht; es ist hinreichend die Verbindung der Unbekannten mit Ueberlegung zu untersuchen, um am schicklichsten diejenige zuerst zu eliminiren, die uns, mit Leichtigkeit, zu den übrigen übergehen läßt.

Es seien z. B. die vier Gleichungen

$$3u - 2y = 2,$$
$$2x + 3y = 39,$$
$$5x - 7z = 11,$$
$$4y + 3z = 41,$$

welche die unbekannten u, x, y und z enthalten.

Mit geringer Ueberlegung ist zu sehen, daß, wenn man in der zweiten Gleichung den Werth von x nimmt, um ihn in die dritte zu substituiren, alsdann diese dritte bloß x und y allein enthält, sie wird also, mit der vierten verbunden, y und z kennen lehren; hernach hat man durch den Werth von y auch die Werthe von u und x, mittelst der ersten und zweiten Gleichung. So verfahren, giebt es folgende Rechnung:

$$x = \frac{39 - 3y}{2},$$

$$5 \times \frac{39 - 3y}{2} - 7z = 11,$$

oder $195 - 15y - 14z = 22$,
oder $15y + 14z = 173$ (§. 57).
Die zwei Gleichungen

$$15y + 14z = 173,$$
$$4y + 3z = 41,$$

wenn sie aufgelöst werden, geben

$$y = 5, \quad z = 7;$$

und durch diese Werthe, haben wir

$$x = \frac{39 - 3 \times 5}{2} = \frac{39 - 15}{2} = \frac{24}{2}, \text{ oder } x = 12,$$

$$u = \frac{2 + 2y}{3} = \frac{2 + 10}{3} = \frac{12}{3}, \text{ oder } u = 4:$$

die gesuchten Zahlen sind also

4, 12, 5 und 7.

§. 82.

Die nun gezeigte Methode wird, sowohl auf Buchstaben-Gleichungen als auch auf Numerische Gleichungen angewandt; aber die Menge der erforderlichen Buchstaben, um die gegebenen Größen gehörig vorzustellen, wenn die Anzahl der Gleichungen und der unbekannten 2 übersteigt, hat die Algebraisten bewogen, ein Mittel auszufinden, sie einfacher auszudrücken. Es soll in dem folgenden §. gezeigt werden. Um aber dem Leser Gelegenheit zu geben sich zu üben, Aufgaben in Gleichung zu bringen, und sie aufzulösen, habe ich hier unten, einige Aufgaben mit ihren Resultaten gegeben.

1) Ein Vater wurde um das Alter seines Sohns gefragt, und gab zur Antwort: Wenn von der doppelten Zahl Jahre, die er jetzt alt ist, das Dreifache der Jahre, die er vor sechs Jahren alt war, abgezogen wird, so kömmt sein gegenwärtiges Alter heraus.

Antwort: Das gegenwärtige Alter des Sohns ist 9 Jahre.

2) Diophantes, Verfasser des ältesten Buchs, wel-

ches wir in der Algebra besitzen, verlebte den sechsten Theil seines Lebens in der Kindheit, den zwölften Theil im Jünglingsalter; dann heirathete er, und in dieser Ehe lebte er den siebenten Theil seines Lebens und noch fünf Jahre, alsdann ward ihm ein Sohn geboren; dieser starb, als er die Hälfte des Alters vom Vater erreicht hatte, und der Vater lebte noch vier Jahre nach dem Tode des Sohns; in welchem Alter starb Diophantes?

Antwort: 84 Jahre alt.

3) Ein Kaufmann zog jedes Jahr aus den Fonds, die er im Handel hatte, 1000 Franken, zur Bestreitung des häuslichen Aufwandes; demohngeachtet vermehrte er jährlich sein Vermögen, um den dritten Theil, von dem was ihm übrig blieb, und nach drei Jahren war er doppelt so reich als Anfangs; wie viel hatte er am Anfange des ersten Jahrs?

Antwort: 14800 Franken.

4) Ein Kaufmann hat zwei Sorten Thee, wovon der Kilogramm der ersten Sorte 14 Franken, der andere 18 Franken gilt; wie viel muß er von jeder nehmen, um daraus eine Kiste von 100 Kilogrammen zu machen, die 1680 Franken kostet?

Antwort: 30 Kilogramme von der ersten und 70 von der zweiten.

5) Zwei Springbrunnen, die nicht zugleich, sondern einer nach dem andern flossen, füllten in 12 Minuten ein Gefäß, welches 39 Liter hielt. Durch den einen Springbrunnen flossen in einer Minute 4 Liter, durch den andern 3 Liter; man fragt, wie viele Minuten jeder geflossen habe?

Antwort: Der erste 3 Minuten, und der zweite 9 Minuten.

6) Der Stunden- und Minutenzeiger stehen beide

genau über einander auf der zwölften Stunde; man fragt, in welchem Punct der Stundenplatte sie das nächste mal wieder genau über einander stehen werden?

Antwort: Bei 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten in der Zeit.

7) Jemand begegnet Bettler und will jedem 25 Centimen geben, als er aber sein Geld zählt, so nimmt er wahr, daß ihm dazu 10 Centimen fehlen, er giebt also jedem Bettler nur 20 Centimen, und es bleiben ihm 25 Centimen übrig; es fragt sich, wie viel Geld dieser Mann bei sich hatte, und wie groß die Anzahl der Bettler war?

Antwort: Er hatte 1 Franken und 65 Centimen bei sich, und es waren 7 Bettler.

8) Drei Brüder hatten ein Gut für 5000 Franken gekauft; dem ersten fehlet zu diesem Ankauf, die Hälfte von dem Gelde, welches der zweite hatte; dieser hier, würde das Gut ganz allein bezahlen, wenn man zu dem was er besitzt, noch den dritten Theil von dem was der erste hat, zulegte; der dritte endlich müßte, um die Zahlung zu leisten, zu dem was er hat, noch ein Viertel von dem was der erste besitzt, hinzufügen; wie viel hat jeder Geld?

Antwort: Der erste hat 30000 Franken, der zweite 40000 und der dritte 42500.

9) Drei Spieler zählen ihr Geld nach geendigtem ersten Spiele; einer hatte verloren, jeder der beiden andern hatte genau so viel gewonnen, als ein jeder von diesen beiden vor dem Spiele hatte. Ein zweites Spiel begann, und in diesem Spiele verlor einer von den zweien, welche vorhin gewonnen hatten, und die beiden andern gewannen jeder so viel, als er am Anfange des Spiels Geld hatte. Nun ward noch ein drittes Spiel gemacht, und darin verlor der, welcher in den zwei ersten Spielen gewonnen hatte, und zwar

so viel an jeden der beiden andern, als jeder von diesen, am Anfange des dritten Spiels hatte; am Ende dieses dritten Spiels, hatte jeder eine gleiche Summe von 120 Franken; es fragt sich, wie viel Franken jeder vor dem Spiele gehabt hat?

Antwort. Der Verlierende im ersten Spiel hatte 195 Fr.
Der Verlierende im zweiten Spiel hatte 105 Fr.
Der Verlierende im dritten Spiel hatte 60 Fr.

Allgemeine Formeln zu den Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade.

§. 83.

Um die, von mir Anfangs des vorhergehenden §. erwähnte Unbequemlichkeit zu vermeiden, ist man darauf verfallen, alle Coefficienten von einer und ebenderselben unbekannten Größe mit einerlei Buchstaben zu bezeichnen, sie aber, um sie unterscheiden zu können, nach der Anzahl der Gleichungen, mit mehreren Akzenten (Oberstrichen) zu versehen.

Die allgemeinen Gleichungen, mit zwei unbekannten Größen werden so geschrieben:

$$a x + b y = c,$$
$$a' x + b' y = c'.$$

Die Coefficienten der unbekannten x, sind beide durch a vorgestellt, die von y durch b; allein die Striche, womit die Buchstaben der zweiten Gleichung bezeichnet sind, machen es sehr kenntlich, daß sie mit den ihnen correspondirenden in der ersten Gleichung nicht einerlei Werth haben. Es ist also a' eine von a, b' eine von b verschiedene Größe.

Hat man drei Gleichungen, so schreibt man sie:

$$a\,x + b\,y + c\,z = d,$$
$$a'\,x + b'\,y + c'\,z = d',$$
$$a''\,x + b''\,y + c''\,z = d''.$$

Alle Coefficienten von der unbekannten x sind mit a, die von y mit b, die von z mit c bezeichnet; aber die Bezeichnung mit einem oder mit zwei Oberstrichen, macht den Unterschied der Größe, von den nämlichen Buchstaben sichtbar. So sind a, a', a'' drei verschiedene Größen, und eben so ist es mit den andern.

In der nämlichen Folge würde man, wenn vier unbekannte Größen und vier Gleichungen da wären, sie so schreiben:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d\,u = e,$$
$$a'\,x + b'\,y + c'\,z + d'\,u = e',$$
$$a''\,x + b''\,y + c''\,z + d''\,u = e'',$$
$$a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z + d'''\,u = e'''.$$

§. 52.

Um die Rechnungen abzukürzen, indem man die Brüche vermeidet, modificirt man das Verfahren der Elimination so:

Es seien die Gleichungen

$$a\,x + b\,y = c,$$
$$a'\,x + b'\,y = c';$$

es ist einleuchtend, daß wenn eine dieser unbekannten z. B. x, in beiden Gleichungen, denselben Coefficienten hätte, so brauchte man sie nur von einander abzuziehen, um diese unbekannte Größe x verschwinden zu lassen. Dieses zeigt sich sofort bei den Gleichungen

$$10\,x + 11\,y = 27,$$
$$10\,x + 9\,y = 15,$$

welche geben

$$11\,y - 9\,y = 27 - 15, \text{ oder } 2\,y = 12, \text{ oder } y = 6.$$

Es ist auch sichtbar, daß man die Coefficienten von x unmittelbar in den Gleichungen

$$a x + b y = c,$$
$$a' x + b' y = c',$$

gleich machen kann, wenn man beide Seiten der ersten, durch a' (Coefficient von x in der zweiten) und die beiden Seiten der zweiten, mit a, (Coefficient von x in der ersten) multiplicirt; man erhält auf solche Art

$$a a' x + a' b y = a' c,$$
$$a a' x + a b' y = a c',$$

Zieht man nun die erste von diesen von der zweiten ab, so wird die unbekannte Größe x verschwinden, und wird bloß haben

$$(a b' - a' b) y = a c' - a' c,$$

eine Gleichung, die nur noch die unbekannte y enthält, und hieraus leiten wir ab

$$y = \frac{a c' - c a'}{a b' - b a'}.$$

Das so eben gezeigte Verfahren kann immer bei Gleichungen vom ersten Grade angewandt werden, um daraus eine der unbekannten Größen fortzuschaffen.

Eliminiren wir eben so y, so hätte man den Werth von x.

Wendet man dieses Verfahren bei den drei Gleichungen an, die x, y und z enthalten, so könnte man zuerst x zwischen der ersten und zweiten eliminiren, dann zwischen der ersten und dritten; so würde man zu zwei Gleichungen gelangen, die nur noch y und z enthalten, und zwischen welchen man nachgehends y eliminirte.

Wenn man die Rechnung ausführt, so wird die Gleichung für z, zu welcher man gelangen würde, einen allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor enthalten, und sie wäre folglich nicht die einfachste, die man erhalten könnte.

§. 85.

Bezout hat eine sehr einfache Methode angegeben, mittelst welcher man, aus einer jeden Anzahl von Gleichungen,

alle unbekannten Größen, weniger eine, mit einemmale eliminiren kann. Obgleich dieses Verfahren nur nöthig ist, wenn von Gleichungen mit drei und mehreren unbekannten Größen die Rede ist, so fange ich doch damit an, sie auf Gleichungen anzuwenden, die nur zwei unbekannte Größen enthalten, um so diesen Gegenstand ganz zu umfassen.

Es seien die zwei Gleichungen

$$a x + b y = c,$$
$$a' x + b' y = c':$$

multipliciren wir die erste mit der Größe m, die unbestimmt sein soll, so wird kommen

$$a m x + b m y = m c;$$

und ziehen wir von diesem Resultat die Gleichung

$$a' x + b' y = c'$$

ab, so haben wir

$$a m x - a' x + b m y - b' y = c m - c',$$

oder

$$(a m - a') x + (b m - b') y = c m - c'.$$

Weil nun m eine ganz unbestimmte Größe ist, deren Werth beliebig angenommen werden darf, so kann man annehmen, sie sei so, daß $b m = b'$. In diesem Falle verschwindet das mit y multiplicirte Glied, und man hat

$$x = \frac{c m - c}{a m - a'};$$

aber wegen $b m = b'$, folgt

$$m = \frac{b'}{b}:$$

folglich

$$x = \frac{\frac{c b'}{b} - c'}{\frac{a b'}{b} - a'} = \frac{c b' - b c'}{a b' - b a'}.$$

Statt $b m = b'$ anzunehmen, könnte man auch $a m = a'$ setzen, alsdann wird das mit x behaftete Glied verschwinden, und es wird kommen

$$y = \frac{cm - c'}{bm - b'}.$$

Der Werth von m wird nun nicht mehr derselbe wie kurz vorher sein; denn man wird haben

$$m = \frac{a}{a};$$

und wenn der Divisor, in den Ausdrücken für y substituirt wird, so findet man

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}.$$

Wenn man die Zeichen des Nenners und des Zählers von diesem Werth ändert, so wird sein Nenner derselbe wie der von x, weil man alsdann haben wird

$$y = \frac{ac - ca}{ab' - ba'}.$$

§. 86.

Es seien die drei Gleichungen

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d'':$$

die Analogie, führt leicht zu dem Gedanken, die erste und zweite Gleichung, mit zwei unbestimmten Größen m und n zu multipliciren, sie zu addiren, und davon die dritte abzuziehn; denn hierdurch werden sie alle zugleich in Gebrauch gestellt, und die zwei neuen Größen m und n, über die man nach Belieben schalten darf, könnten so bestimmt werden, daß zu gleicher Zeit, in dem Resultat, zwei von den unbekannten Größen verschwinden müssen. Verfährt man so, und vereinigt die Glieder, die einerlei unbekannte Größen multipliciren, so wird man haben

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''.$$

Will

Will man, daß x und y verschwinden sollen, so müßte man setzen

$$am + a'n = a'',$$
$$bm + b'n = b''$$

und alsdann wird kommen

$$z = \frac{dm + d'n - d''}{cm + c'n - c''}.$$

Von den beiden Gleichungen, in welchen m und n die unbekannten sind, ist es leicht, den Werth von diesen Größen mittelst der im vorhergehenden §. enthaltenen Resultate abzuleiten; denn es ist hinreichend, in jenen Formeln x mit m, y mit n zu vertauschen, und statt der Buchstaben

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{matrix}\right\} \text{die Buchstaben} \left\{\begin{matrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'', \end{matrix}\right.$$

zu schreiben, welches geben wird

$$m = \frac{a''b - b''a'}{ab' - ba'},$$

$$n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Substituiren wir diese Werthe in den Werth von z, und reduciren alle Glieder auf einerlei Nenner, so wird man finden

$$z = \frac{d(b'a'' - a'b'') + d'(ab'' - ba'') - d''(ab' - ba')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') - c''(ab' - ba')}.$$

Hätte man die mit x und die mit z behafteten Glieder verschwinden lassen, so hätte man y gehabt; die Buchstaben m und n würden von zwei Gleichungen

$$am + a'n = a'', \qquad cm + c'n = c''$$

abgehangen haben; und wenn man wie oben verfährt, so hätte man gefunden

$$y = \frac{d(c'a'' - a'c'') + d'(ac'' - ca'') - d''(ac' - ca')}{b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') - b''(ac' - ca')}.$$

Endlich, wenn man die Gleichungen

$$bm + b'n = b'', \qquad cm + c'n = c'',$$

setzt, so werden dadurch die mit y und mit z multiplicirten Glieder verschwinden, und es wird kommen

$$x = \frac{d(c'b'' - b'c'') + d'(bc'' - cb') - d''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb') - a''(bc' - cb')}.$$

Entwickelt man diese Werthe, so, daß ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ werden, und ändert man zugleich, in der ersten und dritten Gleichung die Zeichen des Zählers und des Nenners, so könnte man ihnen folgende Formen geben:

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba''d'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$y = \frac{adc'' - ac'd'' + ca'd'' - dac' + dc'a'' - cd'a''}{abc' - ac'b'' + cab'' - ba'c'' + bc'a'' - cba''},$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cdb'' - bdc'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a' - cb'a''}.$$

§. 87.

Es seien die vier Gleichungen

$$ax + by + cz + du = e,$$
$$a'x + b'y + c'z + d'u = e',$$
$$a''x + b''y + c''z + d''u = e'',$$
$$a'''x + b'''y + c'''z + d'''u = e'''.$$

Man multiplicire die erste mit m, die zweite mit n, die dritte mit p, addire die Producte und ziehe dann die vierte ab, so wird man finden

$$(am + a'n + a''p - a''')x + (bm + b'n + b''p - b''')y + (cm + c'n + c''p - c''')z + (dm + dn + d''p - d''')u = em + e'n + e''p - e'''.$$

Um u zu haben, setzt man

$$am + a'n + a''p = a''',$$
$$bm + b'n + b''p = b'''$$
$$cm + c'n + c''p = c'''$$

und es wird kommen

$$u = \frac{em + e'n + e''p - e'''}{dm + d'n + d''p - d'''},$$

Die vorhergehenden Gleichungen, die m, n und p geben sollen, werden durch die Formeln für den Fall von drei unbekannten Größen aufgelöst. Dieser Gang muß bequem und leicht erscheinen; aber die Beachtung der Form der oben erhaltenen Resultate, bietet die Mittel, sie ohne Rechnung zu bekommen.

§. 88.

Um zum ersten Ursprung zurück zu gehen, nehme ich eine Gleichung mit einer unbekannten Größe $ax = b$; und ziehe daraus

$$x = \frac{b}{a},$$

wo man sieht, daß der Zähler das ganz bekannte Glied b, und der Nenner, der Coefficient a von der unbekannten Größe ist.

Die zwei Gleichungen

$$ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c',$$

haben gegeben

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

der Nenner ist hier wieder aus den Buchstaben a, a', b, b', welche die unbekannten Größen multipliciren, zusammengesetzt. Man schreibt zuerst den Buchstaben a neben den Buchstaben b, dieses giebt ab; nun vertauscht man a und b unter sich, um ba zu haben, und giebt dieser Anordnung das Zeichen —, so kommt $ab - ba$; endlich giebt man dem zweiten Buchstaben in jedem Gliede einen Akzent: auf diese Art ist der Nenner $ab' - ba'$ gebildet.

Wir wollen nun zeigen, wie hieraus der Zähler abgeleitet werden kann. Es ist leicht wahrzunehmen, daß man für den von x, die a mit c vertauscht, und für die von y die

b mit c, denn auf diese Art findet man für den einen $cb' - bc'$, und für den andern $ac' - ca'$. Der Zähler wird also für zwei unbekannte Größen aus dem Nenner eben so abgeleitet, als für eine einzige unbekannte Größe, wenn man den Coefficienten der gesuchten unbekannten Größe gegen das ganz bekannte Glied vertauscht, und übrigens die Akzente, so wie sie sind, beibehält.

Die bloße Ansicht der aus den Gleichungen mit drei unbekannten Größen entspringenden Werthe zeigt hinlänglich, daß sie sich dieser Regel nicht entziehen. In Betreff ihrer Zähler bedarf es ein wenig mehr Aufmerksamkeit, um deren Bildung zu erkennen. Da indessen für zwei unbekannte Größen der Nenner alle mögliche Versetzungen der zwei Buchstaben a und b, die diese unbekannte Größen multipliciren, darstellt, so läßt sich schon denken, daß bei drei unbekannten Größen der Nenner alle Versetzungen der drei Buchstaben a, b, c enthalten muß, und um diese Versetzungen in einer übersichtlichen Ordnung zu bilden, verfährt man wie folgt.

Zuerst bildet man die Versetzungen $ab - ba$ der zwei Buchstaben a und b. Am Ende der ersten ab schreibt man den dritten Buchstaben c, welches abc giebt; und wenn man diesen Buchstaben durch alle Stellen gehen läßt, mit der Vorsicht jedesmal die Zeichen zu verändern, und die respective Ordnung von a und b nicht stört, so entspringt daraus

$$abc - acb + cab.$$

Verfährt man eben so mit der zweiten Versetzung $-ba$, so findet man

$$-bac + bca - cba;$$

vereinigt man diese Producte mit den drei vorhergehenden, bezeichnet nachgehends den zweiten Buchstaben mit einem Akzent, und den dritten mit zwei, so findet man

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c' + bc'a'' - cb'a'',$$

ein Resultat, welches mit dem oben unmittelbar gefundenen völlig einerlei ist.

Es läßt sich hieraus leicht abnehmen, daß man für vier unbekannte Größen, den Buchstaben d in jedem der sechs Producte

$$abc — acb + cab — bac + bca — cba,$$

einführen, und ihn nach und nach alle Stellen einnehmen lassen muß; z. B. das Glied abc würde die folgenden vier geben:

$$abcd — abdc + adbc — dabc.$$

Verfährt man eben so mit den fünf andern Producten, so wird das ganze Resultat vier und zwanzig Glieder haben, in deren jedem der zweite Buchstabe einen Strich, der dritte zwei, und der vierte drei Striche haben wird. Die Zähler der unbekannten u, z, y und x würden sich nach der eben ausgesprochenen Regel ableiten lassen *).

§. 89.

Um diese Formel bei der Auflösung der numerischen Gleichungen anzuwenden, muß man die vorgelegten Gleichungen, Glied vor Glied, mit den allgemeinen Gleichungen des vorhergehenden §. vergleichen.

Um z. B. die drei Gleichungen

$$7x + 5y + 2z = 79,$$
$$8x + 7y + 9z = 122,$$
$$x + 4y + 5z = 55,$$

aufzulösen, müßte man diese Gleichungen, Glied für Glied, mit den Gleichungen aus §. 86. vergleichen, welches geben würde

$$a = 7, \quad b = 5, \quad c = 2, \quad d = 79,$$
$$a' = 8, \quad b' = 7, \quad c' = 9, \quad d' = 122,$$
$$a'' = 1, \quad b'' = 4, \quad c'' = 5, \quad d'' = 55,$$

---

*) Laplace hat in dem zweiten Theile der Mémoires de l'Acad. des Sciences fürs Jahr 1772, pag. 249, diese Regel a priori erwiesen. Man sehe auch die *Annales de Mathématiques pures et appliquées* par M. Gergonne, T. IV. pag. 148.

Subſtituiren wir dieſe Werthe in die allgemeinen Ausdrücke für x, y und z, und verrichten die angezeigten Operationen, ſo wird man finden

$$x=4, \qquad y=9, \qquad z=3.$$

Es iſt wichtig zu bemerken, daß eben dieſe Ausdrücke auch dann noch gebraucht werden können, wenn gleich nicht alle Glieder der gegebenen Gleichung das Zeichen + haben, welches die allgemeinen Gleichungen, woraus dieſe Ausdrücke hergeleitet ſind, vorauszuſetzen ſcheinen. Hätte man z. B. dieſe Gleichungen,

$$3x-9y+8z=41,$$
$$-5x+4y+2z=-20,$$
$$11x-7y-6z=37,$$

ſo müßte man, bei der Vergleichung dieſer Glieder mit ihren correſpondirenden in den allgemeinen Gleichungen, auch auf die Zeichen Rückſicht nehmen und daher ſetzen

$$a=+3, \quad b=-9, \quad c=+8, \quad d=+41,$$
$$a'=-5, \quad b'=+4, \quad c'=+2, \quad d'=-20,$$
$$a''=+11, \quad b''=-7, \quad c''=-6, \quad d''=+37,$$

und endlich müßte man, den Regeln des §. 31. gemäß, das Zeichen, welches jedes Glied der allgemeinen Ausdrücke für x, y, z bekommen muß, nach den Zeichen der Factoren, aus welchen es zuſammengeſetzt iſt, beſtimmen. So würde man z. B. finden, daß das erſte Glied des gemeinſchaftlichen Nenners, welches $ab'c''$ iſt, hier $+3\times+4\times-6$ wird, das Zeichen verändert, und -72 giebt. Wendet man eben dieſe Aufmerkſamkeit auf die übrigen Glieder, ſowohl des Zählers als des Nenners an, ſo wird man, wenn man einerſeits, die Summe derjenigen Glieder, welche poſitiv ſind, und anderſeits die der negativen nimmt, finden

$$x=\frac{2774-2834}{592-622}=\frac{-60}{-30}=+2,$$

$$x=\frac{3022-2932}{592-622}=\frac{+90}{-30}=-3,$$

$$z = \frac{3859 - 3889}{592 - 622} = \frac{-30}{-30} = +1.$$

Von den Gleichungen, vom zweiten Grade, mit einer einzigen unbekannten Größe.

§. 90.

In den Gleichungen, welche wir bisher aufgelöst haben, erreichten die unbekannten Größen weder eine höhere Potenz als die erste, noch fanden sie sich darin in einander multiplicirt, und waren daher nur vom ersten Grade. Wenn man sich indessen nur folgende Aufgabe vorlegt: **Eine Zahl zu finden, welche, durch ihr Fünffaches multiplicirt, 125 zum Product giebt**; so wäre, wenn man diese Zahl durch x bezeichnet, deren Fünffaches $5x$, und man würde haben

$$5x^2 = 125.$$

Diese Gleichung ist vom **zweiten Grade**, weil sie x^2 oder die zweite Potenz von x enthält. Befreiet man diese zweite Potenz von ihrem Coefficienten, so ergiebt sich

$$x^2 = \frac{125}{5}, \quad \text{oder} \quad x^2 = 25.$$

Aus dieser Gleichung wird man nicht, so wie in §. 11., den Werth von x bestimmen können, und die vorgelegte Frage ist lediglich darauf zurückgebracht, eine Zahl zu finden, welche, durch sich selbst multiplicirt, 25 zum Product bringt. Ein wenig Aufmerksamkeit wird uns zeigen, daß diese Zahl 5 ist. Es ereignet sich aber selten, daß man wie hier die gesuchte Auflösung vorher errathen kann. Wir sind daher auf eine neue Zahlenaufgabe gekommen, nämlich diese: **Eine Zahl zu finden, die, durch sich selbst multiplicirt, ein Product gebe, welches einer gegebenen Zahl gleicht**; oder, welches dasselbe ist, aus der zweiten Potenz einer Zahl, diese Zahl selbst, oder die, welche diese Potenz hervorgebracht hat, und welche man ihre **Quadratwurzel** nennt, zu finden.

Wir wollen uns vorläufig bloß auf die Auflösung dieser Aufgabe einschränken, weil sie uns zur Bestimmung aller unbekannten Größen in den Gleichungen des zweiten Grades dienen muß.

§. 91.

Die Methode nun, welche man, um die Quadratwurzeln aus Zahlen zu finden, oder auszuziehn, befolgen muß, setzt voraus, daß man die zweiten Potenzen aller einziffrigen Zahlen kennt, weshalb wir die zweiten Potenzen der neun ersten Zahlen unter dieselben setzen wollen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Man sieht aus dieser Tafel, daß die zweite Potenz einer einziffrigen Zahl, nicht mehr als zwei Ziffern haben kann. Denn die Zahl 10, welches die kleinste der durch zwei Ziffern ausgedrückten Zahlen ist, hatt erst 100 zum Quadrat, die kleinste der durch drei Ziffern ausgedrückten Zahlen. Um uns nun zur Zerfällung der zweiten Potenz einer zweiziffrigen Zahl vorzubereiten, müssen wir erst die Entstehung derselben aufmerksam betrachten. Wir wollen in dieser Hinsicht untersuchen, was jeder Theil der Zahl 47 z. B., zur Hervorbringung des Quadrats dieser Zahl beiträgt.

Diese Zahl 47 läßt sich in $40+7$, oder in 4 Zehner und 7 Einer zerlegen. Bezeichnen wir nun allgemein, die Zehner der vorgelegten Zahl, durch a, und deren Einer durch b, so wird sich ihre zweite Potenz durch

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

ausdrücken lassen, sie wird nämlich aus folgenden drei Theilen bestehn: **aus dem Quadrate der Zehner, mehr dem Producte aus den Zehnern in den Einer zweimal genommen, und aus dem Quadrate der Einer.** In dem gewählten Beispiele, ist $a=4$ Zehner oder 40 Einer, und $b=7$; man wird also haben

$$a^2 = 1600$$
$$2ab = 560$$
$$b^2 = 49$$

also $a^2 + 2ab + b^2 = 2209 = 47 \times 47$.

Um nun von der Zahl 2209 auf ihre Wurzel zurück zu kommen, bemerke man zuerst, daß das Quadrat der Zehner 1600 keine bedeutende Ziffern einer niedrigern Ordnung als die Hunderte sind, enthält, und daß es das größte Quadrat ist, welches die 22 Hunderte in der Zahl 2209 enthalten können. Denn 22 fällt zwischen 16 und 25, oder zwischen das Quadrat von 4 und das von 5, so wie 47 zwischen 4 Zehnern, oder 40 und zwischen 5 Zehnern oder 50 liegt.

Wenn man also das größte in 22 enthaltene Quadrat sucht, so wird man 16 finden, dessen Wurzel 4 die Zehner der Wurzel von 2209 geben wird. Zieht man 16 Hunderte oder 1600 von 2209 ab, so muß der Rest 609 noch das doppelte Product aus den Zehnern in die Einer, 569 und das Quadrat der Einer 49 enthalten. Da aber das Doppelte aus den Zehnern in die Einer keine Ziffern einer niedrigern Ordnung, als die Zehner sind, enthalten kann, so muß das doppelte Product, in den beiden ersten Ziffern 60 des Restes 609 anzutreffen sein, welche überdies die aus dem Quadrate der Einer entspringenden Zehner enthalten werden. Wenn man daher 60 durch 8, als das Doppelte der Zehner dividirt, so wird man, wenn man den Rest außer Acht läßt, 7 zum Quotienten erhalten, welcher den gesuchten Einheiten gleich ist. Multiplicirt man nun 8 durch 7, so bildet man dadurch das doppelte Product aus den Zehnern in die Einer, 560, welches, von 609 abgezogen, 49 zum Rest läßt, welcher das Quadrat der Einer sein muß und auch wirklich ist.

Die Operationen, welche wir eben gemacht haben, lassen sich folgendermaßen anordnen:

```
22,09 | 47
------|---
 16   | 87
------|
 60,9
 609
-----
 000
```

Man schreibe nämlich die vorgelegte Zahl auf eben die Art, als wenn sie durch eine andere dividirt werden sollte, und bestimme, für die Wurzel, die Stelle, welche der Divisor einnehmen würde. Man sondere dann die Einheiten und Zehner von den übrigen Ziffern durch ein Komma ab, um bloß die beiden ersten Ziffern zur Linken zu betrachten, welche das Quadrat der Zehner der Wurzel enthalten. Ferner suche man das größte in diesen beiden Ziffern enthaltene Quadrat, 16, setze dessen Wurzel 4 in die ihr bestimmte Stelle, und ziehe 16 von 22 ab. Zum Rest 6 setze man die beiden andern Ziffern 09 der vorgelegten Zahl herunter; sondere die letzte derselben, welche keinen Theil des doppelten Products aus den Zehnern in die Einer ausmacht, von den übrigen durch ein Komma ab, und dividire den zur linken Seite übrig bleibenden Theil durch 8, als das Doppelte der Zehner der Wurzel, welches zum Quotienten 7 giebt. Um nun die beiden letzten Theile des Quadrats, welche in 609 enthalten sein müssen, auf einmal zu bilden, schreibe man 7 neben die 8, woraus 87 entsteht, welches den doppelten Zehnern nebst den Einern, oder der Größe $2a+b$ gleicht, und welches durch 7 oder durch b multiplicirt $609 = 2ab+b^2$, oder das doppelte Product aus den Zehnern in die Einer, nebst dem Quadrate der Einer giebt. Da nun, nachdem subtrahirt worden, nichts übrig bleibt, so zeigt die beendigte Operation, daß 47 die Quadratwurzel aus 2209 sei.

Wäre die Quadratwurzel aus 324 zu suchen, so würde ich die Operation folgendermaßen ansetzen:

3,24	18
1	
2,24	28
224	
000	

Nachdem ich nämlich, den obigen Regeln gemäß, für die Zehner der Wurzel 1 gefunden habe, dividire ich die beiden ersten Ziffern des Restes 22 durch 2, als das Doppelte dieser Zehner. Ob nun gleich die Zahl 22 eilf mal die 2 enthält, so kann doch der zweite Theil der Wurzel außerdem, daß er weder größer als 10, noch 10 selbst sein kann, in diesem Falle auch nicht 9 sein; denn wenn man 9 neben den Divisor schreibt und die dadurch entstehende Zahl 29 durch 9 multiplicirt, so erhält man zum Product 261, welches sich von 224 nicht abziehen läßt. Man kann also die Division der 22 durch 2 nur als Annäherungsmittel zur Erhaltung der Einheiten der Wurzel betrachten, und muß daher den Quotienten so lange vermindern, bis man ein Product erhält, welches nicht größer als 224 ist; eine Bedingung, welcher die Zahl 8 Genüge leistet, indem $8 \times 28 = 224$. Die gesuchte Wurzel wird also 18 sein.

Bildet man aus dieser Wurzel die drei Theile des Quadrats, so findet man:

$$a^2 = 100$$
$$2ab = 160$$
$$b^2 = 64$$

folglich $324 = 18 \times 18$,

woraus man sieht, daß die 6 Zehner, welche aus dem Quadrate der Einer entspringen, zu 160, als dem doppelten Product aus den Einern in die Zehner hinzugesetzt, dieses Product dergestalt ändern, daß die Division desselben, durch das Doppelte der Zehner, nicht mehr die bloßen Einer zum Quotienten bringen kann.

§. 92.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl, kann nach dem bisher Gesagten keine Schwierigkeit machen. Wir müssen aber noch einige Erläuterungen hinzufügen, um die Anfänger in den Stand zu setzen, aus einer jeden Zahl, wenn sie auch aus noch so vielen Ziffern bestände, die Quadratwurzel ziehn zu können. Wir wollen diese aus den bisher gegebenen Begriffen herzuleiten suchen.

Jede Zahl unter hundert, kann höchstens vier Ziffern zum Quadrat haben, weil die dreiziffrige Zahl hundert erst 10000, oder die kleinste Zahl, welche mit fünf Ziffern geschrieben werden kann, zum Quadrat hat. Dieses vorausgesetzt, wollen wir nun die Bildung des Quadrats einer dreiziffrigen Zahl, z. B. das von 473 untersuchen. Diese Zahl läßt sich in 470 + 3 oder in 47 Zehner und 3 Einer zerlegen, und man muß, um das Quadrat derselben nach der Formel

$$a^2 + 2ab + b^2$$

zu bilden, $a = 47$ Zehner $= 470$ Einer, und $b = 3$ Einer setzen, wodurch man erhalten wird

$$a^2 = 220900$$
$$2ab = \quad 2820$$
$$b^2 = \quad\quad 9$$

Summa $223729 = 473 \times 473$.

Man sieht in diesem Beispiel, daß das Quadrat der Zehner keine bedeutende Ziffern einer niedern Ordnung als der Hunderte enthält, und dieses muß immer zutreffen, weil Zehner durch Zehner multiplicirt, Hunderte geben. (Arithm. 32.)

Es kann daher das Quadrat der Zehner nur in dem Theil 2237 der vorgelegten Zahl, welcher, nachdem man die Einer und Zehner abgeschnitten hat, zur linken Seite übrig bleibt, anzutreffen sein; und da 473 zwischen 47 Zehner, oder 470 und 48 Zehner oder 480 fällt, so muß auch 2237 zwi-

schen dem Quadrat von 47 und dem von 48 liegen; und folglich kann das größte in 2237 enthaltene Quadrat nur das von 47, oder von den Zehnern der Wurzel sein. Es ist hieraus offenbar, daß man, um dieses Quadrat zu finden, nur so zu verfahren braucht, als wenn man aus 2237 die Quadratwurzel ziehen wollte, nur daß man, anstatt ein genaues Resultat zu erhalten, auf einen Rest kommen wird, in welchem die aus dem doppelten Product der 47 Zehner in die Einer entspringenden Hunderte enthalten sein werden.

Um die Rechnung wirklich auszuführen, ordne man die Operation folgendermaßen:

```
22,37,29 | 473
16       | 87
63,7     | 943
609
282,9
2829
0
```

Man sondere nämlich die beiden letzten Ziffern 29 ab, und um aus dem zur linken Seite übrig bleibenden Theile 2237 die Wurzel ziehen zu können, sondere man noch die beiden letzten Ziffern 37 dieser Zahl ab. Auf diese Art wird die vorgelegte Zahl, von der rechten zur linken Seite zu, in Klassen von zweien Ziffern zerlegt sein. Mit den beiden ersten Klassen verfahre man, wie im vorhergehenden §. mit der Zahl 2209 geschehen ist; dieses giebt für die beiden ersten Ziffern der Wurzel 47; es bleibt aber noch ein Rest 28, welcher zur letzten Klasse 29 gesetzt, das doppelte Product aus den 47 Zehnern in die Einer, nebst dem Quadrat der Einer enthalten muß. Man sondere nun die Ziffer 9, welche keinen Theil des doppelten Products aus den Zehnern in die Einer ausmacht, durch ein Komma ab, und dividire 282 durch 94, als das Doppelte des Zehners 47. Schreibt man dann den Quotienten 3 neben 94, und multiplicirt 943 durch

3, so kommt 2829, eine Zahl, welche dem letzten Reste völlig gleich, daher die Operation beendigt ist.

§. 93.

Um zu zeigen, wie man bei jeder beliebigen Zahl verfährt, wollen wir annehmen, wir hätten die Quadratwurzel aus 22391824 zu ziehen. Was auch diese Wurzel für eine Zahl sein mag, so wird sie sich immer, wie im vorhergehenden Beispiel, als aus Einern und Zehnern zusammengesetzt vorstellen lassen. Da das Quadrat der Zehner keine bedeutende Ziffer einer niedrigern Ordnung als die der Hunderte in sich begreift, so können die beiden letzten Ziffern 24 keinen Theil dieses Quadrats enthalten. Man schneide sie daher ab, und die Aufgabe wäre fürs erste darauf zurück gebracht, daß in dem zur linken Seite übrig bleibenden Theil 223918 enthaltene größte Quadrat zu finden. Da dieser Theil noch immer aus mehr als zwei Ziffern zusammengesetzt ist, so kann man daraus schließen, daß die Zahl, welche die Zehner der gesuchten Wurzel angiebt, mehr als zwei Ziffern haben, und sich daher von neuem in Einer und Zehner zerlegen lassen muß. Das Quadrat dieser Zehner kann sich nur bis an die letzten beiden Ziffern 18 des Theils 223918 erstrecken, und muß daher in den zur linken Seite noch übrig bleibenden Ziffern 2239 gesucht werden; und da auch noch 2239 mehr als zwei Ziffern enthält, so muß das darin enthaltene Quadrat, wenigstens zwei Ziffern zur Wurzel haben. Man wird daher endlich das Quadrat der Einheiten von der höchsten Ordnung der Wurzel, nur in den beiden letzten Ziffern zur Linken 22 zu suchen haben. Durch diese Reihe von Schlüssen, welche so weit man will getrieben werden können, wird sich die vorgelegte Zahl in Klassen von zwei Ziffern zerlegt finden; wobei aber wohl zu merken ist, daß die letzte Klasse zur Linken, auch wohl nur eine einzige Ziffer haben kann.

Nachdem die vorgelegte Zahl abgetheilt und auf neben-

22,39,18,24	4732
16	87
63,9	943
60 9	9462
301,8	
282 9	
1892,4	
1892,4	
00000	

stehende Art angeordnet ist, verfährt man mit den drei ersten Klassen zur Linken eben so, wie mit dem Beispiele des vorhergehenden §.; und wenn man die drei ersten Ziffern 473 gefunden hat, setze man zum Rest 189, die vierte Klasse 24 herunter, und betrachte die Zahl 18924, als enthielte sie das doppelte Product aus den gefundenen 473 Zehnern in die gesuchten Einer, nebst dem Quadrate der Einer. Man sondere daher die letzte Ziffer 4 ab, und dividire die zur linken Seite übrig bleibenden Ziffern, durch 946, als das Doppelte von 473. Endlich untersuche man den Quotienten 2, wie in den vorigen Operationen.

Hiermit ist nun in diesem Beispiel die Operation beendigt. Man sieht aber leicht, daß wenn noch eine Klasse vorhanden wäre, die vier gefundenen Ziffern, 4732 die Zehner der Wurzeln ausdrücken würden, deren Einer gesucht werden, und daß man daher den in diesem Falle noch bleibenden Rest nebst der obersten Ziffer der folgenden Klasse durch das Doppelte der Zehner dividiren müsse. Dasselbe Verfahren würde bei jeder der folgenden noch herunter zu setzenden Klasse Statt finden.

§. 94.

Wenn, nachdem man eine Klasse herunter gesetzt hat, die erste Ziffer dieser Klasse zum Rest hinzugesetzt, nicht das Doppelte der gefundenen Ziffern enthält, so muß man für die gesuchte Ziffer der Wurzel o setzen, weil die Wurzel in diesem Falle keine Einheit dieser Ordnung enthält. Um nun die Operation auf die gewöhnliche Art fortzusetzen, muß man die folgende Klasse herunter rücken, wie aus nebenstehendem

Exempel zu ersehen ist, wo dieser Fall sich ereignet. Man hat hierin die zu subtrahirenden Größen nicht hingesetzt, sondern die Subtraction in Gedanken verrichtet.

49,42,09	703
04,20,9	1403
0000	

§. 95.

Es ist aber nicht jede gegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat. Wenn man nur die Tabelle in §. 91. aufmerksam betrachtet, so sieht man, daß zwischen den Quadraten jeder der neun ersten Ziffern verschiedene Zahlen liegen, welche keine Wurzel haben. So ist z. B. die Zahl 45, welche zwischen 36 und 49 liegt, kein vollkommenes Quadrat. Wenn man mit einer dergleichen Zahl so verfährt, als wenn sie eine Wurzel hätte, so wird das Resultat die Wurzel des größten darin enthaltenen Quadrats sein. Wenn man z. B. die Wurzel aus 2276 sucht, so findet man zur Wurzel 47 und zum Rest 67, welches uns zeigt, daß das in 2276 enthaltene größte Quadrat, das von 47 oder 2209 ist.

Da man, nachdem man die Wurzel des größten in einer Zahl enthaltenen Quadrats gefunden hat, irgend eine der Ziffern dieser Wurzel zu klein genommen zu haben befürchten muß, so wollen wir zeigen, wie man erkennen kann, ob der Rest zu groß, und die gesuchte Wurzel zu klein genommen sei. Da das Quadrat von $a+b$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

ist, so wird, wenn man $b=1$ setzt, das Quadrat von $a+1$ sein

$$a^2 + 2a + 1,$$

eine Größe, welche von a^2, als dem Quadrat von a, um das Doppelte von a nebst der Einheit unterschieden ist. Wenn also die gefundene Wurzel um eins, oder um mehr als eins, vermehrt werden sollte, so müßte das Quadrat derselben von der gegebenen Zahl abgezogen, einen

Rest

Rest lassen, welcher wenigstens so groß ist als das Doppelte dieser Wurzel mehr Eins. So oft also dieses nicht eintrifft, wird die gefundene Wurzel wirklich die des größten in der gegebenen Zahl enthaltenen Quadrats sein.

§. 96.

Da man, um einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren, die Zähler in einander und die Nenner in einander multipliciren muß, so ist einleuchtend, daß das Product eines Bruchs mit sich selbst, oder das Quadrat eines Bruchs gleich ist dem Quadrate des Zählers, durch das Quadrat des Nenners dividirt. Hieraus folgt umgekehrt, daß man, um aus einem Bruch die Quadratwurzel zu ziehn, die Quadratwurzel aus dem Zähler und dem Nenner suchen muß; also die Quadratwurzel aus $\frac{25}{64}$ ist $\frac{5}{8}$, weil 5 die Quadratwurzel des Zählers, und 8 die des Nenners ist.

Es ist sehr wichtig zu bemerken, daß nicht allein die Quadrate der eigentlichen Brüche immer Brüche sind, sondern, daß jede nicht reducirbare Bruchzahl, mit sich selbst multiplicirt, immer eine ebenfalls unreducirbare Bruchzahl als Resultat giebt.

§. 97.

Dieser Satz beruht auf dem folgenden: Wenn eine Primzahl P, das Product AB der beiden Zahlen A und B dividirt, so muß sie wenigstens eine dieser Zahlen dividiren.

Gesetzt, sie dividire B nicht, und sei kleiner als B. Bezeichnen wir nun den Quotienten dieser Division, so weit er sich in ganzen Zahlen angeben läßt, durch q, und durch B' den Rest, so werden wir erhalten

$$B = qP + B',$$

woraus wir, wenn mit A multiplicirt wird,

$$AB = qAP + AB'$$

ableiten; und wenn wir beide Theile dieser Gleichung durch P dividiren, so erhalten wir

$$\frac{AB}{P} = qA + \frac{AB'}{P},$$

wo, weil AB durch P theilbar ist, es nothwendigerweise AB' durch dieselbe Zahl sein muß. Da nun die Zahl B', weil sie der Rest der Division von B durch P, und folglich kleiner als P ist, durch diese Zahl nicht mehr dividirt werden kann: so wollen wir annehmen, daß man P durch B' dividire, und zum Quotienten q', zum Rest aber B' erhalte; daß man ferner durch die Division von P durch B' zum Quotienten q'' und zum Rest B''' erhalte, welches so fortgesetzt werden kann, weil P eine Primzahl ist.

Dieses vorausgesetzt, wird man folgende Reihe von Gleichungen haben:

$$P = q'B' + B'', \quad P = q'B'' + B''', \text{ u. s. w.;}$$

multipliciren wir jede mit A, so erhält man

$$AP = qAB + AB', \quad AP = q''AB' + AB'' \text{ u. s. w.}$$

Dividiren wir mit P, so kommt

$$A = q\frac{AB}{P} + \frac{AB''}{P}, \quad A = q''\frac{AB'}{P} + \frac{AB'''}{P}, \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Resultaten sehen wir, daß, da AB' durch P theilbar ist, so müssen es auch die Producte AB'', AB''', u. s. w. sein. Aber die Reste B', B, B'' u. s. w. werden nothwendig immer kleiner, und man muß endlich auf 1 kommen; denn die oben angegebenen Operationen werden auf die nämliche Weise so lange fortgesetzt, als die Reste größer wie 1 sind, weil P eine Primzahl ist; und wenn man zur Einheit gekommen ist, so hat man das Product $A \times 1$, welches durch P theilbar sein soll: folglich muß A selbst durch P theilbar sein.

Hieraus folgt, daß wenn angenommen wird, die Primzahl P sei kein Theiler von B und auch nicht von A, so ist sie auch kein Theiler von dem Product dieser Zahlen.

(Dieser Beweis ist fast ganz aus der Théorie des Nombres von Legendre ausgezogen.)

§. 98.

Gesetzt nun, der Bruch $\frac{b}{a}$ könne nicht reducirt werden, so giebt es gewiß keine Primzahl (größer als 1), wodurch b und a zugleich ohne Rest dividirt werden könne; nun wissen wir aus dem Vorhergehenden, daß jede Primzahl, die a nicht theilt, theilt auch $a \times a$ oder a^2 nicht; jede Primzahl, die b nicht theilt, theilt auch $b \times b$ oder b^2 nicht; die Zahlen a^2 und b^2 sind also alsdann Primzahlen unter sich, und folglich, da das Quadrat $\frac{b^2}{a^2}$ von dem Bruche $\frac{b}{a}$, wie dieser Bruch nicht zu reduciren ist, so kann es auch keine ganze Zahl sein.

§. 99.

Aus dem letzten Satze folgt, daß diejenigen ganzen Zahlen, die keine vollkommene Quadrate sind, auch keine Wurzel, weder in ganzen, noch in gebrochenen Zahlen haben können. Indessen begreift man wohl, daß es eine Zahl geben muß, die mit sich selbst multiplicirt, irgend eine Zahl hervorbringt, z. B. 2276, und daß in diesem Falle diese Zahl zwischen 47 und 48 liegen muß: denn 47×47 giebt ein Product, kleiner als diese Zahl, 48×48 giebt ein größeres; und wenn man den Abstand zwischen 47 und 47 durch Brüche angiebt, so findet man Zahlen, die mit sich selbst multiplicirt, Producte geben, die größer als das Quadrat von 47, und kleiner als das Quadrat von 48 sind, und immer mehr und mehr sich der Zahl 2276 nähern.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus Zahlen, die keine vollkommene Quadrate sind, führt auf eine neue Art von Zahlen, den Brüchen ähnlich, auf welche die Division führt; es ist jedoch zwischen den Brüchen und den Wurzeln der Zahlen, die nicht vollkommene Quadrate sind, der Unterschied, daß die ersteren, die sich immer aus einer bestimmten Anzahl von Theilen der Einheit zusammensetzen, mit dieser Einheit ein gemeinschaftliches Maaß, oder ein durch ganze Zahlen ausgedrücktes Verhältniß haben, und die zweiten dieses nicht haben.

Denkt man sich die Einheit z. B. in fünf Theile getheilt, so drückt man durch neun dieser Theile den Quotienten von der Division 9 durch 5 oder $\frac{9}{5}$ aus; da $\frac{1}{5}$ in der Einheit fünfmal und neunmal in $\frac{9}{5}$ enthalten ist, so ist $\frac{1}{5}$ das gemeine Maaß von der Einheit und von dem Bruche $\frac{9}{5}$, und das Verhältniß dieser Größen ist das der ganzen Zahlen 5 und 9.

Betrachtet man, daß die ganzen Zahlen sowohl als die Brüche, mit der Einheit ein gemeinschaftliches Maaß haben, so sagt man, diese Größen sind **ausmeßbar** (**commensurabel**) mit der Einheit, oder bloß **commensurabel**; und weil ihre Verhältnisse zur Einheit durch ganze Zahlen ausgedrückt sind, so bezeichnet man auch die ganzen Zahlen und die Brüche mit dem gemeinschaftlichen Namen **rationale Zahlen.**

Im Gegentheile, ist die Quadratwurzel aus einer nicht vollkommenen Quadratzahl **incommensurabel** (**unausmeßbar** oder **irrational**), weil solche Wurzel durch keinen Bruch genau ausgedrückt werden kann, so folgt, daß, in welche Zahltheile man sich auch die Einheit getheilt vorstellen will, keiner klein genug sein wird, um zugleich diese Wurzel und die Einheit genau zu messen.

Um überhaupt die Ausziehung einer Quadratwurzel anzuzeigen, es sei daß man sie genau bestimmen kann, oder nicht, bedient man sich des Zeichens $\sqrt{\ }$, welches man **Wurzelzeichen** nennt;

$\sqrt{16}$ ist dasselbe als 4,
$\sqrt{2}$ ist incommensurabel oder irrational.

§. 100.

Ob man gleich, weder durch eine ganze Zahl noch durch eine Bruchzahl, einen richtigen Ausdruck für $\sqrt{2}$ erhalten kann, so kann man sich ihr doch so weit nähern als man will. Wenn man nämlich die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll, in einen Bruch verwandelt, der einen Nenner hat, welcher irgend eine richtige Quadratzahl ist; nimmt man nun aus dem Zähler, die größtmöglichste ganze Zahl, als Wurzel, so erhält man eine Bruchzahl als Wurzel aus der gegebenen Zahl, deren Zähler die Menge, deren Nenner aber die Art der Einheit angiebt.

Wenn man z. B. die Zahl 2 in 25stel verwandelt, so hätte man $\frac{50}{25}$. Da die Wurzel aus 50 in ganzen Zahlen 7, und die aus 25, genau 5 ist, so hätte man $\frac{7}{5}$, oder $1\frac{2}{5}$, als Wurzel aus 2, wenigstens bis auf etwas weniger als $\frac{1}{5}$ genau.

§. 101.

Man sieht leicht, daß diese Operation, welche darauf beruht, daß das Quadrat eines Bruchs wiederum ein Bruch sei, dessen Zähler dem Quadrat des vorigen Zählers und dessen Nenner dem Quadrate des vorigen Nenners gleich sei (§. 96.), bei allen Arten von Brüchen, und am leichtesten bei den Decimalbrüchen, ihre Anwendung findet. Denn es folgt aus dem Gesetz derselben, daß das Quadrat einer in Zehntheilen ausgedrückten Zahl, eben dieses Quadrat, aber in Hunderttheilen sein wird, und daß überhaupt die Anzahl der Decimalziffern im Quadrate immer doppelt so groß als die der Wurzel sein muß. Dies Letztere läßt sich auch aus dem Gesetz der Multiplication mit Decimalbrüchen leicht abnehmen, nach welchen das Product so viele

Decimalziffern bekommen muß, als in beiden Factoren zusammengenommen enthalten sind. Da nun im gegenwärtigen Falle die vorgelegte Zahl, als das Product ihrer Wurzel, durch sich selbst betrachtet werden kann, so muß sie doppelt so viel Decimalziffern als ihre Wurzel haben.

Nachdem das Vorhergehende wohl begriffen ist, sieht man leicht ein, daß man, um z. B. die Quadratwurzel aus 227 bis auf ein Hunderttheil richtig zu erhalten, diese Zahl in Zehntausendtheile verwandeln, das heißt ihr vier Nullen anhängen muß, welches 2270000 geben würde, und daß man dann hieraus, wie aus einer Zahl von ganzen Einheiten, die Quadratwurzel ziehen muß. Um aber anzuzeigen, daß die Wurzel in Hunderttheilen ausgedrückt ist, muß man die beiden letzten Ziffern zur Rechten durch ein Komma absondern, und man wird finden, daß die Wurzel aus 227, wenigstens bis auf ein Hunderttheil, 15,06 ist. Die Operation ist folgende:

2,27,00,00	1506
12,7	25
20000	3006
1964	

Wenn die gegebene Zahl schon Decimalstellen enthalten sollte, so müßte man, wie es die Ausziehung der Quadratwurzel erfordert, immer eine gerade Anzahl derselben zu erhalten suchen. So müßte man, wenn aus 51,7 die Wurzel zu ziehen wäre, dieser Zahl eine Null anhängen, um wenigstens Hunderttheile zu erhalten, und dann aus 51,70 die Quadratwurzel ziehen. Wollte man die Wurzel auf eine Decimalstelle weiter haben, so müßte man zwei Nullen mehr anhängen, welches 51,7000 geben würde, woraus die Wurzel 7,19 ist.

Diejenigen, welche sich hierin üben wollen, können die Quadratwurzel aus den Zahlen 2 und 3 bis auf 7 Decimal-

stellen suchen, in welcher Absicht sie 14 Nullen an diese Zahlen anhängen müssen. Man findet

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136, \quad \sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

§. 102.

Sind einmal mehr als die Hälfte der Ziffern, welche man für die Wurzel zu erhalten sich vorsetzt, gefunden, so kann man die übrigen durch eine bloße Division finden. Es sei z. B. diese Zahl 32976, deren Quadratwurzel 181, mit einem Rest 215. Dividirt man nun 215 durch 362, als das Doppelte von 181, so wird man, wenn man diese Division bis auf zwei Decimalstellen treibt, 0,59 erhalten, welche Zahl, zu 181 hinzugesetzt, 181,59 für die Quadratwurzel aus 32976 giebt, welche bis auf ein Hunderttheil genau ist.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen, wollen wir die vorgelegte Zahl durch N, die Wurzel des größten darin enthaltenen Quadrats durch a, und durch b das bezeichnen, was noch zu dieser Wurzel hinzugesetzt werden muß, um die Wurzel der vorgelegten Zahl genau zu erhalten. Dieser Bezeichnung zufolge, werden wir erhalten

$$N = a^2 + 2ab + b^2,$$

woraus folgt

$$N - a^2 = 2ab + b^2;$$

und wenn man durch $2a$ dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

Dieses Resultat giebt uns zu erkennen, daß man in allen den Fällen, wo $\frac{b^2}{2a}$ kleiner als eine Einheit der niedrigsten Ordnung von b sein würde, den ersten Theil der obigen Gleichung für b nehmen könne. Da nun das Quadrat einer Zahl höchstens doppelt so viele Ziffern als diese Zahl selbst haben kann, so folgt, daß im Falle die Anzahl der Ziffern von

a größer wäre als das Doppelte der Ziffern b, alsdann $\frac{b^2}{2a}$ ein ächter Bruch sein würde.

Im vorhergehenden Beispiele war $a = 181$ Einheiten, oder 18100 Hunderttheile, und hat folglich eine Ziffer mehr als das Quadrat von 59 Hundertel. Der Bruch $\frac{b^2}{2a}$ wird also $\frac{3481}{36200}$ und folglich viel kleiner als eine Einheit des zweiten Theils 59, oder als ein Hundertel der Einheit des ersten Theils sein.

§. 103.

Hierdurch gelangen wir zu einer Methode, sich der Quadratwurzel einer Zahl durch gewöhnliche Brüche zu nähern, indem man nur die gewöhnlichen Regeln über die Ausziehung der Quadratwurzel dabei anwendet. Sie gründet sich darauf, daß, weil a die Wurzel des größten in N enthaltenen Quadrats ist, b nothwendigerweise ein Bruch, und daher $\frac{b^2}{2a}$ noch weit kleiner als b sein muß.

Es sei z. B. die Quadratwurzel aus 2 zu ziehen. Da das größte in dieser Zahl enthaltene Quadrat 1 ist, so bleibt, wenn man dieses davon abzieht, 1 im Rest. Theilen wir nur diesen Rest durch das Doppelte der Wurzel, so erhalten wir $\frac{1}{2}$, und dieser Quotient, für die Größe b gesetzt, giebt für eine erste Annäherung der Wurzel $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$. Erhebt man nun diese Zahl ins Quadrat, so findet man $\frac{9}{4}$, welches von 2 oder $\frac{8}{4}$ abgezogen, $-\frac{1}{4}$ zum Rest läßt. Die Formel

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

wird in diesem Falle

$$-\frac{1}{12} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

Nehmen wir nun $-\frac{1}{12}$ für b, so werden wir für eine zweite Annäherung der Wurzel, $\frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$ erhalten, wovon das

Quadrat $\frac{289}{144}$, und also noch immer größer als 2, oder als $\frac{288}{144}$ ist. Substituirt man $\frac{17}{12}$ statt a, so erhält man

$$-\frac{1}{12\times 34} = b + \frac{b^2}{2a},$$

welches

$$b = -\frac{1}{12\times 34} = -\frac{1}{408}$$

giebt. Die dritte Annäherung der gesuchten Wurzel wird also sein

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{12\times 34} = \frac{17\times 34 - 1}{408} = \frac{577}{408}.$$

Es ist leicht diese Operation so weit als man will, fortzusetzen. In dem Complement (oder IIten Theil) zu dieser Algebra werde ich andere bequemere Formeln zur allgemeinen Ausziehung der Wurzeln geben.

§. 104.

Um sich der Quadratwurzel aus einem Bruche zu nähern, bietet sich zuerst der Gedanke dar, durch Näherung die Quadratwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner zu ziehen; denkt man aber ein wenig darüber nach, so wird man bald inne, daß man eine von diesen Wurzelausziehungen vermeiden kann, wenn der Nenner in ein richtiges Quadrat verwandelt wird, welches nur von der Multiplication beider Glieder des gegebenen Bruchs mit diesem Nenner abhängt. Hätte man z. B. die Quadratwurzel aus $\frac{3}{7}$ zu ziehen, so verwandelte man diesen Bruch in

$$\frac{3\times 7}{7\times 7} = \frac{21}{49},$$

indem man seine beiden Glieder mit dem Nenner 7 multiplicirt. Die Wurzel aus dem Zähler dieses letzten Bruchs in ganzen Zahlen genommen, giebt $\frac{4}{7}$ als die Wurzel aus $\frac{3}{7}$, und dieses Resultat ist bis auf $\frac{1}{7}$ nahe.

Um einen höhern Grad von Genauigkeit zu erhalten, wenigstens durch Näherung, müßte man den Bruch in

einen andern verwandeln, dessen Nenner ein Quadrat von einer grösseren Zahl als 7 ist. So hätte man z. B. die verlangte Wurzel bis $\frac{1}{15}$ nahe, wenn man $\frac{3}{7}$ in 225stel verwandelte, weil 225 das Quadrat von 15 ist; es wird also $\frac{675}{7}$ von 225stel oder $\frac{96}{225}$, wenigstens bis auf $\frac{1}{225}$; die Wurzel aus $\frac{96}{225}$ liegt zwischen $\frac{9}{15}$ und $\frac{10}{15}$, aber näher bei dem zweiten Bruche als bei dem ersten, weil 96 näher an 100 als an 81 liegt: man hätte also $\frac{10}{15}$ oder $\frac{2}{3}$ als Wurzel aus $\frac{3}{7}$ wenigstens bis $\frac{1}{15}$ nahe.

Wollte man die Decimalbrüche anwenden, um die Näherungswurzel aus dem Zähler des Bruchs $\frac{21}{49}$ zu ziehen, so fände man 4,583 als die genäherte Wurzel aus dem Zähler 21, und dieses Resultat dividirte man durch die Wurzel aus dem neuen Nenner. Sucht man den Quotienten bis auf drei Decimalstellen, so hätte man 0,655.

§. 105.

Jetzt ist man im Stande jede Gleichung aufzulösen, in welcher die unbekannte Größe nur in der zweiten Potenz, mit bekannten Größen verbunden, vorkommt.

Hierzu ist es hinlänglich, alle mit dieser Potenz behafteten Glieder auf einer Seite zu vereinigen, sie dann von ihren Multiplicatoren nach der Regel aus §. 11. zu befreien; zieht man nun die Quadratwurzel aus der andern Seite, so ergiebt sich der Werth der unbekannten Größe.

Es sei z. B. die Gleichung

$$\frac{5}{7}x^2 - 8 = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

Wenn man die Divisoren wegschafft, so findet man sogleich

$$15x^2 - 168 = 84 - 14x^2.$$

Versetzt man das Glied $14x^2$ nach der ersten Seite, und das Glied 168 nach der zweiten Seite, so wird kommen

$$15x^2 + 14x^2 = 84 + 168,$$

oder

$$29x^2 = 252,$$

und $$x^2 = \frac{252}{29},$$

$$x = \sqrt{\frac{252}{29}}.$$

Man muß wohl bemerken, daß, um die Wurzel aus dem Bruche $\frac{252}{29}$ anzuzeigen, ich das Zeichen $\sqrt{\ }$ unter dem Strich, welcher den Zähler von dem Nenner trennt, habe herab gehen lassen müssen. Hätte ich geschrieben $\frac{\sqrt{252}}{29}$, so würde dieser Ausdruck den Quotienten angezeigt haben, den die Quadratwurzel aus 252 durch 29 dividirt, giebt; ein von dem ersten verschiedenes Resultat, in welchem die Division vor der Wurzelausziehung verrichtet werden soll.

Es sei noch die Buchstabengleichung

$$ax^2 + b^3 = cx^2 + d^3;$$

verfahren wir wie bei der vorhergehenden, so werden wir nach und nach haben

$$ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3,$$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c}.$$

$$x = \sqrt{\frac{d - b^3}{a - c}}.$$

Bei dieser Gelegenheit will ich bemerken, daß wenn man die Wurzel aus einer complexen Größe anzeigen will, man den obern Strich des Wurzelzeichens über die ganze Größe hin verlängern muß.

Die Wurzel aus der Größe $4a^2b - 2b^3 + c^3$, wird also geschrieben

$$\sqrt{4a^2b - 2b^3 + c^3}$$

oder auch wohl

$$\sqrt{(4a^2b - 2b^3 + c^3)},$$

indem man, statt des obern Strichs, sich der Klammern bedient, die alle Glieder von der Größe einschließen, aus welchen die Wurzel gezogen werden soll, und dieser letzte Ausdruck scheint öfters den Vorzug zu verdienen (§. 35) *).

*) Ein Wurzelzeichen ohne den obern Strich vor einem Bruche ge-

Ueberhaupt kann jede Gleichung vom zweiten Grade von der hier betrachteten Art, durch die Versetzung ihrer Glieder, auf die Form

$$\frac{px^2}{q} = a$$

gebracht werden, wo $\frac{p}{q}$ den beliebigen numerischen Coefficienten von x^2 bezeichnet; und man wird daraus erhalten

$$x^2 = \frac{aq}{p},$$

$$x = \sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

§. 106.

In Bezug auf absolute Zahlen, ist die Auflösung vollständig, weil sie zu einer arithmetischen Operation aus ganzen oder gebrochenen Zahlen, welche die Größe $\frac{aq}{p}$ vorstellt, führt, die immer einen genauen, oder doch dem wahren so annähernden Werth giebt als man will; allein, nimmt man Rücksicht auf das Zeichen, welches die Größen haben können, so läßt die Ausziehung der Quadratwurzel eine Zweideutigkeit, nach der jede Gleichung vom zweiten Grade, zwei Auflösungen zuläßt, da die Gleichungen vom ersten Grade nur eine einzige gewähren.

In der That, da in der Gleichung $x^2 = 25$, der Werth von x eine Größe ist, die, zum Quadrat erhoben, 25 giebt, so könnte sie, wenn man die Größen algebraisch betrachtet, gleichgültig das Zeichen + oder das Zeichen — haben; denn

---

schrieben, zeigt an, daß die gedachte Wurzel aus dem ganzen Zähler und aus dem ganzen Nenner gezogen werden soll, so vielnamig der Zähler und Nenner auch immer sein mögen. Herr Lacroix verlangt einen Strich oder Klammer; dieses ist aber unnütz, denn es kann hier keine Zweideutigkeit entstehen. Gruson.

sie sei durch $+5$ oder durch -5 bezeichnet, so wird ihr Quadrat doch sein

$$+5 \times +5 = +25, \text{ oder } -5 = \times -5 = +25.$$

Man kann also nehmen

$$x = +5,$$

oder

$$x = -5.$$

Aus demselben Grunde für die allgemeine Gleichung

$$x^2 = \frac{aq}{p},$$

wird man gleichgültig haben

$$x = +\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

$$x = -\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Beide Ausdrücke begreift man in dem folgenden:

$$x = \pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

wo das doppelte Zeichen $\pm$ anzeigt, daß man dem Zahlenwerth von

$$\sqrt{\frac{aq}{p}}$$

abwechselnd das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$ geben kann.

Nach dem so eben Bemerkten ist es eine allgemeine Regel, **daß man der Quadratwurzel aus jeder Größe das doppelte Zeichen $\pm$ vorsetzen müsse.**

Man könnte nun fragen, warum, da doch x die Quadratwurzel von x^2 ist, dieses x selbst nicht auch das doppelte Zeichen $\pm$ erhalte? Hierauf wird zuerst mit Herrn Develey (Algèbre d'Emile T. II.) geantwortet, daß nämlich der Buchstabe x ohne Zeichen, als Symbol der unbekannten Größe, (d. h. mit dem Zeichen $+$) aufgenommen worden; in diesem Zustande muß man nun ihren Werth bestimmen, und daß, wenn man eine Zahl x sucht, deren Quadrat z. B. b sei, so giebt es nur diese zwei Auflösungen:

$x = +\sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. Endlich, selbst wenn man die Gleichung $x^2 = b$ auflöste, und schriebe $\pm x = \pm\sqrt{b}$, und machte alle mögliche Verbindungen dieser Zeichen, nämlich:

$$+x = +\sqrt{b}, \qquad -x = -\sqrt{b},$$
$$+x = -\sqrt{b}, \qquad -x = +\sqrt{b},$$

so würde man doch nichts anders erhalten; denn wenn man das Zeichen der Glieder der zweiten Gleichung in jeder Zeile verwechselte (§. 57), so würde man auf die erste zurück kommen.

§. 107.

Aus der Betrachtung der Zeichen selbst folgt noch, daß, wenn die zweite Seite der allgemeinen Gleichung

$$x^2 = \frac{aq}{p}$$

eine negative Zahl wäre, so wäre die Gleichung ungereimt, denn da das Quadrat von einer Größe, sie mag das + oder das — Zeichen haben, immer das Zeichen + hat, so kann man weder unter den positiven Größen, noch unter den negativen, irgend eine Größe finden, deren Quadrat negativ sei.

Es ist dieser Umstand, den man ausdrückt, wenn man sagt: **die Quadratwurzel aus einer negativen Größe ist imaginair (unmöglich).**

Kommt man zu der Gleichung

$$x^2 + 25 = 9,$$

so zieht man daraus

$$x^2 = 9 - 25,$$

oder

$$x^2 = -16;$$

aber es giebt keine Zahl, die, mit sich selbst multiplicirt, — 16 gebe. Wahr ist es, daß — 4, multiplicirt mit + 4, giebt — 16; da aber diese zwei Größen verschiedene Zeichen haben, so kann man sie nicht als gleich annehmen, und ihr Produkt ist folglich kein Quadrat. Weiter unten wird noch mehr Licht über diese Art von Widerspruch verbreitet werden,

welche wohl von der in §. 58. zu unterscheiden ist, die durch eine bloße Zweideutigkeit der unbekannten Größe verschwand; hier ist es das Zeichen vom Quadrate von x^2, welches man ändern müßte.

§. 108.

Damit eine Gleichung vom zweiten Grade, worin sich nur eine unbekannte Größe findet, vollständig sei, so muß sie drei Arten von Gliedern enthalten, nämlich: Glieder, die das Quadrat der unbekannten Größe zum Factor haben, andere Glieder, die die erste Potenz der unbekannten Größe zum Factor haben; endlich andere ganz bekannte. Von dieser Art sind die Gleichungen

$$x^2 - 4x = 12, \qquad 4x - \tfrac{3}{5}x^2 = 4 - 2x.$$

Die erste Gleichung ist in gewisser Rücksicht einfacher als die zweite, weil sie 1) nur drei Glieder enthält; 2) weil das Quadrat der unbekannten Größe nicht nur positiv darin vorkömmt, sondern auch mit keinem andern Coefficienten als mit 1 versehen ist. Dieses letztere ist die Form, unter welche man immer die Gleichungen vom zweiten Grade bringt, bevor sie aufgelöst werden, so daß sie alsdann durch diese Formel

$$x^2 + px = q$$

vorgestellt werden können, wo p und q bekannte positive oder negative Größen bezeichnen.

Begreiflich wird jede Gleichung vom zweiten Grade, unter obige Form gebracht, wenn man 1) alle mit x behafteten Glieder auf eine Seite bringt (§. 10); 2) wenn das Glied, welches x^2 enthält, hier negativ sein sollte, so ändert man das Zeichen von jedem Gliede, um das von x^2 positiv zu machen (§. 57); 3) ist x^2 mit einem andern Coefficienten als 1 behaftet, so werden alle Glieder mit diesem Coefficienten dividirt (§. 11), sollte aber x^2 mit einer Zahl dividirt sein, so werden alle Glieder mit diesem Divisor multiplicirt (§. 12).

Wenden wir dieses auf die Gleichung

$$4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$$

an, und bringen auf die erste Seite die mit x behafteten Glieder, so bekommen wir

$$-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4;$$

ändert man die Zeichen

$$\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4;$$

multiplicirt man mit 5,

$$3x^2 - 30x = -20;$$

und wenn man mit dem Multiplicator 3 dividirt,

$$x^2 - 10x = -\frac{20}{3}.$$

Vergleichen wir nun diese Gleichung mit der allgemeinen Formel

$$x^2 + px = q,$$

so hätte man für diesen besondern Fall

$$p = -10, \quad q = -\frac{20}{3}.$$

§. 109.

Um zu der Auflösung so vorbereiteter Gleichungen zu gelangen, muß man sich an das erinnern, was ich (§. 34.) bemerken ließ, nämlich: daß das Quadrat einer zweitheiligen Größe immer besteht aus dem Quadrat des ersten Gliedes, aus dem Product des ersten Gliedes mit dem zweiten, und aus dem Quadrate des zweiten Gliedes; und daß folglich die erste Seite der Gleichung

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

in welcher a und b die bekannten Größen sind, ein richtiges Quadrat ist, nämlich von $x + a$, oder daß man habe

$$(x + a)(x + a) = b.$$

Nimmt man die Wurzel aus der ersten Seite, und zeigt die aus der zweiten an, so wird man haben

$$x + a = \pm\sqrt{b},$$

eine Gleichung, die in Bezug der unbekannten Größe x nur noch vom ersten Grade ist, und durch Versetzen giebt:

$x =$

$$x = -a \pm \sqrt{b}.$$

Eine Gleichung vom zweiten Grade wäre also leicht aufzulösen, wenn sie auf die Form

$$x^2 + 2ax + a^2 = b$$

gebracht wäre, d. h. wenn ihre erste Seite ein Quadrat wäre.

Aber die erste Seite der allgemeinen Gleichung

$$x^2 + px = q$$

enthält schon zwei Glieder, die man als Theile von dem Quadrat eines Binom ansehen kann, nämlich: x^2, welches das Quadrat vom ersten Gliede x sein wird, und px, welches das Doppelte des ersten Gliedes mit dem zweiten Gliede multiplicirt, und folglich nur die Hälfte von p, oder $\frac{1}{2}p$ sein kann. Um das Quadrat des Binom $x + \frac{1}{2}p$ zu vollenden, bedarf es noch des Quadrats vom zweiten Gliede $\frac{1}{2}p$; aber dieses Quadrat kann, weil p und $\frac{1}{2}p$ bekannte Größen sind, gebildet und alsdann zu der ersten Seite hinzugefügt werden, wenn man es nur zugleich auch zu der zweiten Seite hinzusetzt, um die Gleichheit zu erhalten; und diese zweite Seite wird noch ganz bekannt bleiben.

Die Addition des Quadrats von $\frac{1}{2}p$, d. i. $\frac{1}{4}p^2$ zu der gegebenen Gleichung

$$x^2 + px = q,$$

verändert sie in

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2,$$

ein Resultat, dessen erste Seite das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ ist; nimmt man also von beiden Seiten die Wurzel, so ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2} \quad (\S.\ 106.),$$

und versetzen wir, so kommt

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

woraus ich successive ziehe

$$x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}$$

und $$x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

Ich habe das + Zeichen dem zweiten Gliede $\frac{1}{2}p$ der Wurzel aus der ersten Seite der vorgelegten Gleichung

gegeben, weil das zweite Glied in dieser Seite positiv war; man muß darin im entgegengesetzten Falle das Zeichen — setzen, weil das Quadrat $x^2 - 2ax + a^2$ dem Binom $x - a$ entspricht.

Die Auflösung jeder beliebigen Gleichung vom zweiten Grade wird erhalten, wenn man diese Gleichung auf die allgemeine Formel

$$x^2 + px = q$$

bezieht, oder auch, indem man unmittelbar auf die gegebene Gleichung die Operation anwendet, die man mit dieser Formel gemacht hat, und die so ausgedrückt werden kann.

Ergänze die erste Seite der gegebenen Gleichung zu einem vollständigen Quadrat, durch Zusetzung des Quadrats vom halben Coefficienten der ersten Potenz der unbekannten Größe auf beiden Seiten der Gleichung. Man ziehe dann aus jeder Seite die Quadratwurzel, indem man beobachtet, daß die Wurzel aus der ersten Seite besteht aus der unbekannten und aus der halben gegebenen Größe, die sie im zweiten Gliede multiplicirt, mit dem Zeichen dieser Größe genommen, und daß die Wurzel aus der zweiten Seite das Vorzeichen ± haben und durch das Zeichen $\sqrt{\ }$ angezeigt werden muß, wenn sie sich nicht unmittelbar ausziehen läßt.

Hier sind einige Beispiele.

§. 110.

Eine Zahl zu finden, die 7 mal genommen zu ihrem Quadrat gesetzt, die Summe 44 giebt.

Wenn x die gesuchte Zahl bedeutet, so wird die Gleichung offenbar sein

$$x^2 + 7x = 44.$$

Um sie aufzulösen, nehme ich $\frac{7}{2}$, die Hälfte des Coefficienten 7, der x multiplicirt, und zum Quadrat erhoben, habe ich die Größe $\frac{49}{4}$, die ich zu jeder Seite hinzusetze, wie folgt:

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4},$$

reduciren wir die zweite Seite zu einem einzigen Bruche, so kommt

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}.$$

Die Wurzel aus der ersten Seite ist, nach der obigen Regel, $x + \frac{7}{2}$, und man findet als Wurzel, aus der zweiten Seite, $\frac{15}{2}$; man hat also die Gleichung

$$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{15}{2},$$

aus welcher man zieht

$$x = -\frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

oder $$x = -\frac{7}{2} + \frac{15}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$x = -\frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{22}{2} = -11.$$

Der erste Werth von x löst die Aufgabe in dem Sinne ihrer Aussage, weil man durch diesen Werth hat

$$x^2 = 16$$
$$7x = 28$$

Summa..... 44.

Den zweiten Werth betreffend, da er das Zeichen — hat, so wird das Glied $7x$

$$7 \times -11 = -77,$$

und muß also von x^2 abgezogen werden; so daß die Aussage der durch die Zahl 11 aufgelösten Aufgabe diese ist:

Eine Zahl zu finden, die 7 mal genommen von ihrem Quadrat abgezogen, einen Rest 44 läßt.

Der negative Werth modificirt also hier die Aufgabe auf eine analoge Art, wie man es für die Gleichungen vom ersten Grade gesehen hat.

Sezte man die obige Aussage in Gleichung, so würde man erhalten

$$x^2 - 7x = 44,$$

und löst man auf, so wird kommen

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4}.$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4},$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \frac{15}{2}.$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

$$x = \frac{22}{2} = 11.$$

$$x = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Der negative Werth von x ist positiv geworden, weil er buchstäblich die neue Aussage befriedigt, und der positive Werth, der nicht eben so befriedigt, ist negativ geworden.

Hieraus sieht man, daß im zweiten Grade die Algebra in einer einzigen Formel zwei Aufgaben vereinigt, die unter sich eine gewisse Analogie haben.

§. 111.

Oefters sind Aufgaben, die zu Gleichungen vom zweiten Grade führen, zweier Auflösungen fähig; die folgende gehört zu diesem Falle:

Eine Zahl zu finden, daß, wenn 15 zu ihrem Quadrat addirt wird, die Summe gleich 8mal der gesuchten Zahl sei.

Es sei x die gesuchte Zahl, so wird die Gleichung sein

$$x^2 + 15 = 8x.$$

Sezt man diese Gleichung unter die vorgeschriebene Form (§. 108), so wird man haben

$$x^2 - 8x = -15,$$
$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16,$$
$$x^2 - 8x + 16 = 1,$$
$$x - 4 = \pm 1,$$
$$x = 4 \pm 1,$$

oder

$$x = 5,$$
$$x = 3,$$

Es sind hier also zwei verschiedene Zahlen, 5 und 3, welche die in der Aufgabe enthaltene Eigenschaft besitzen.

§. 112.

Zuweilen kommen Aufgaben vor, die auf keinerlei Weise im strengen Sinne ihrer Aussage aufgelöst werden können, und die modificirt werden müssen; dieser Fall ist der, in welchem beide Wurzeln der Gleichung negativ sind, wie in der folgenden:

$$x^2 + 5x + 6 = 2.$$

Diese Gleichung, die ausdrückt, daß das Quadrat der gesuchten Zahl um das 5fache dieser Zahl vermehrt, und noch um 6, eine Summe geben soll, die gleich 2 ist, kann offenbar so gestellt, durch Addition nicht genügt werden, weil schon 6 die 2 übertrifft; und in der That, wenn man sie auflöst, so findet man successive

$$x^2 + 5x = -4,$$
$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4},$$
$$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2},$$
$$x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1,$$
$$x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

Die Zeichen — womit die Zahlen 1 und 4 behaftet sind, zeigen, daß das Glied $5x$ von den andern subtrahirt

werden soll, oder daß die Aufgabe, für die zwei Werthe, so abgeändert werden muß.

Eine Zahl zu suchen, daß wenn man ihr Fünffaches von ihrem Quadrat abzieht, und zu dem Reste 6 addirt, man 2 als Resultat erhält.

Aus dieser Aussage ergiebt sich die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 2,$$

die für x die beiden positiven Werthe 1 und 4 giebt.

§. 113.

Es sei ferner die Aufgabe:

Eine Zahl p in zwei Theile zu theilen, deren Product gleich q sei.

Wenn man den einen von diesen Theilen mit x bezeichnet, so wird der andere durch $p - x$ ausgedrückt, und ihr Product, wird sein $px - x^2$; man hätte also die Gleichung

$$px - x^2 = q,$$

oder, wenn man die Zeichen verändert,

$$x^2 - px = -q;$$

löst man diese Gleichung auf, so wird man finden

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Wenn man, um diese Aufgaben zu particularisiren,

$$p = 10, \qquad q = 21,$$

macht, so wird man haben

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21},$$
$$x = 5 \pm 2,$$
$$x = 7,$$
$$x = 3,$$

d. h. einer dieser Theile wird 7, und der andere folglich $10 - 7$ oder 3 sein.

Nähme man hingegen 3 für x, so wäre der andere Theil $10 - 3$ oder 7; so hat in Bezug der bestehenden Aussage, die Aufgabe eigentlich nur eine Auflösung, weil die

zweite nur eine Verwechselung der Stellen zwischen den Theilen ist.

Die aufmerksame Betrachtung von x läßt sehen, daß man in der in Rede stehenden Aufgabe nicht ganz willkührlich die Zahlen p und q nehmen darf; denn wenn q größer als $\frac{p^2}{4}$ wäre, oder als das Quadrat von $\frac{1}{2}p$, so wäre die Größe $\frac{p^2}{4} - q$ negativ, und man verfiele auf das in §. 107. bemerkte Kennzeichen der Ungereimtheit.

Nähme man z. B.

$$p = 10 \text{ und } q = 30,$$

so würde kommen

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 30} = 5 \pm \sqrt{-5};$$

die Aufgabe wäre also mit ihren gegebenen Größen unmöglich.

§. 114.

Die Ungereimtheit der Aufgaben, die zu imaginairen Wurzeln führen, offenbart sich nur beim Schlusse der Rechnung, und es ist daher wünschenswerth, die Merkmale zu erkennen, worin die Ungereimtheit einer Aufgabe bestehet, aus welcher die der Auflösung folgt; dieses wird auf eine sehr bestimmte Art die folgende Betrachtung angeben.

Es sei d der Unterschied der zwei Theile der gegebenen Zahl; der größte wird sein $\frac{p}{2} + \frac{d}{2}$, der kleinste $\frac{p}{2} - \frac{d}{2}$ (§. 3.); nun ist (§. 29, 30 und 34) dargethan, daß

$$\left(\frac{p}{2} + \frac{d}{2}\right)\left(\frac{p}{2} - \frac{d}{2}\right) \frac{p^2}{4} - \frac{d^2}{4};$$

das Product aus den beiden Theilen der gegebenen Zahl, welche sie auch sein mögen, ist also immer kleiner als $\frac{p^2}{4}$, oder als das Quadrat von ihrer halben Summe, so lange d nicht Null ist; und tritt dieser Umstand ein, da alsdann jeder

dieser Theile gleich $\frac{p}{2}$ ist, so wird ihr Product nur $\frac{p^2}{4}$. Es ist also ungereimt zu verlangen, es sei größer; und die Algebra, indem sie alsdann auf eine den Principien widersprechende Art antwortet, beweist dadurch, daß das was man sucht, gar nicht vorhanden ist.

Was man so eben über die durch die vorhergehendene Aufgabe entstandene Gleichung

$$x^2 - px = -q,$$

nachgewiesen hat, kommt allen Gleichungen vom zweiten Grade zu, wo q auf der zweiten Seite negativ ist, die einzigen, in welchen man imaginaire Wurzeln antreffen kann, weil das unter das Wurzelzeichen gestellte Glied $\frac{p^2}{4}$ immer das Zeichen $+$ behält, was auch p für ein Zeichen haben mag. In der That, wenn man die Gleichung hätte

$$x^2 + px = -q, \text{ oder } x^2 + px + q = 0,$$

so würde man sogleich sehen, daß sie gar keine positive Auflösung geben könnte, weil ihre erste Seite nur additive Glieder enthält; und um zu wissen, ob die unbekannte x negativ sein könnte, wäre es hinlänglich x in $-y$ umzuändern. Die unbekannte y hätte alsdann positive Werthe, welche durch die Gleichung

$$y^2 - py + q = 0, \text{ oder } y^2 - py = -q$$

gegeben wären, die genau dieselbe als die im vorhergehenden §. ist; da aber die Werthe von x nur dann reel sein können, wenn die von y es wären, so würden sie im gegenwärtigen Falle wieder imaginair, wenn q größer als $\frac{p^2}{4}$ wäre.

Aus den obigen Bemerkungen sieht man also, wie und warum, wenn das ganz bekannte Glied einer Gleichung vom zweiten Grade auf der zweiten Seite negativ ist, und größer als das Quadrat von der Hälfte des Coef-

ficienten der ersten Potenz von der unbekannten, diese Gleichung nur imaginaire Wurzeln haben kann.

§. 115.

Die Ausdrücke

$$\sqrt{-b}, \qquad a + \sqrt{-b},$$

und überhaupt alle, worin die Quadratwurzel aus einer negativen Größe gezogen werden soll, heißen: **imaginaire Größen (eingebildete oder unmögliche Größen)** *). Es sind nur Symbole des Widerspruchs, oder der Ungereimtheit, welche die Stelle des Werths einnehmen, den man erhalten hätte, wenn die vorgegebene Aufgabe möglich gewesen wäre.

Man läßt sie im Calcul nicht weg, weil es öfters geschieht, daß, wenn man sie nach gewissen Gesetzen zusammen verbindet, die Absurdität sich aufhebt und das Resultat möglich wird. Man findet davon Beispiele in dem **Complement** zu dieser Algebra.

§. 116.

Da es für Anfänger nöthig ist, daß sie von den analytischen **Thatsachen** richtige Begriffe erlangen, besonders da, wo solche Thatsachen schon aus allgemeinen Vernunftgründen hervorzugehen scheinen, so wird es nicht überflüssig sein, hier noch einige weitere Erläuterungen über das (in §. 106) Gesagte beizufügen, nämlich daß es durchaus nöthig ist, zwei Werthe für die unbekannte Größe in den Gleichungen vom zweiten Grade zuzulassen.

Es soll nämlich gezeigt werden, daß, **wenn** es eine Größe a giebt, die, statt x gesetzt, der Gleichung vom zweiten Grade $x^2 + px = q$ genugthue, und sie folglich der Werth von x sei, diese unbekannte alsdann noch einen zweiten Werth haben wird.

---

*) Es wäre richtiger zu sagen imaginaire Ausdrücke oder Symbole, weil es keine Größen sind.

Man setze demnach a in die Gleichung statt x, so hat man $a^2 + px = q$. Und da man angenommen hat, a sei ein wahrer Werth von x, so muß auch q nothwendig gleich der Größe $a^2 + pa$ sein; demnach kann man statt q diese Größe in die gegebenen Gleichung setzen, die dadurch

$$x^2 + px = a^2 + pa$$

werden wird. Versetzen wir alle Glieder der zweiten Seite nach der ersten, so wird kommen

$$x^2 + px - a^2 - pa = 0,$$

welches man so schreiben kann:

$$x^2 - a^2 + p(x - a) = 0;$$

und da

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \text{ (§. 34.)},$$

so sieht man sogleich, daß die erste Seite durch $x - a$ theilbar ist, und einen genauen Quotienten giebt, nämlich: $x + a + p$: man hat also hiernach

$$x^2 + px - q = x^2 - a^2 + p(x - a) = (x - a)(x + a + p).$$

Nun ist es einleuchtend, daß ein Product gleich Null ist, wenn irgend einer seiner Factoren Null wird; man muß also haben

$$(x - a)(x + a + p) = 0,$$

nicht allein, wenn $x - a = 0$, welches

$$x = a$$

giebt, sondern auch noch, wenn $x + a + p = 0$, woraus hervorgeht

$$x = -a - p.$$

Es ist also erwiesen, daß wenn a einer von den Werthen von x ist, alsdann $-a - p$ nothwendig der andere Werth sein wird.

Dieses Resultat stimmt mit den beiden in der Formel

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}$$

überein; denn wenn man z. B. für a den ersten Werth, $-\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p}$ nimmt, so wird man für den andern finden

$$-a-p=+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}-p=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

welches in der That die zweite Wurzel ist.

In der Folge werde ich auf diese Bemerkungen zurück kommen, welche den Keim der allgemeinen Theorie der Gleichungen von jeglichem Grade enthalten.

§. 117.

Die Schwierigkeit, die Aufgaben in Gleichungen zu setzen, ist für den zweiten Grad, und überhaupt für jeden Grad, dieselbe wie für den ersten, und besteht immer in der Art, alle in den Aufgaben enthaltene deutlichen Bedingungen aus einander zu setzen, und sie mittelst algebraischer Zeichen auszudrücken. Die vorhergegangenen Aufgaben boten in dieser Hinsicht keine Schwierigkeit dar, und man muß nun gleich vom ersten Grade an hinlänglich geübt sein; indessen sollen hiernach Aufgaben aufgelöst werden, die zu einigen sehr nützlichen Bemerkungen Veranlassung geben werden.

Zwei angestellte Arbeiter hatten nicht gleichen Tagelohn; der erste erhielt für eine gewisse Anzahl Arbeitstage 96 Franken, und der zweite, da er 6 Tage weniger gearbeitet hatte, erhielt nur 54 Franken; hätte der zweite eben so viel Tage gearbeitet als der erste, der erste aber 6 Tage weniger als der zweite, so hätten beide gleich viel Lohn empfangen. Man fragt, wie viele Tage jeder gearbeitet, und wie viel eines jeden Tagelohn betragen habe.

Diese Aufgabe, die beim ersten Ueberblick mehrere unbekannte Größen zu enthalten scheint, wird sehr leicht mittelst einer einzigen unbekannten Größe aufgelöst, denn die übrigen werden unmittelbar durch diese hier ausgedrückt.

Bezeichnen wir durch x die Anzahl der Arbeitstage des ersten Arbeiters, so wird

$x-6$ die Anzahl der Arbeitstage des zweiten sein,

$\frac{96 \text{ Fr.}}{x}$ wird das Tagelohn des ersten Arbeiters sein,

$\frac{54 \text{ Fr.}}{x-6}$ das des zweiten;

wenn der letztere während x Tage gearbeitet hätte, so hätte er gewonnen

$$x \times \frac{54}{x-6}, \quad \text{oder} \quad \frac{54x}{x-6},$$

und da der erste nur $x-6$ Tage gearbeitet, so hätte er nur gehabt

$$(x-6)\frac{96}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{96(x-6)}{x};$$

die Gleichung der Aufgabe wird also sein

$$\frac{54x}{x-6} = \frac{96(x-6)}{x}.$$

Man muß zuerst die Nenner aus dieser Gleichung wegschaffen, und dann kommt

$$54x^2 = 96(x-6)(x-6);$$

da die Zahlen 54 und 96 beide durch 6 theilbar sind, so vereinfacht sich dieses Resultat. Man findet

$$9x^2 = 16(x-6)(x-6).$$

Man könnte diese letzte Gleichung, um sie aufzulösen, nach der Regel des §. 108. vorbereiten; da aber der Gegenstand dieser Regel nur die Erleichterung der Wurzelausziehung aus jeder Seite der vorgegebenen Gleichung betrifft, so ist sie hier unnütz, wo beide Theile sich sofort unter der Form von Quadraten darstellen; denn es ist sichtbar, daß $9x^2$ das Quadrat von $3x$ ist, und $16(x-6)(x-6)$ das Quadrat von $4(x-6)$ ist. Man wird also zur Stelle haben

$$3x = \pm 4(x-6);$$

woraus hervorgeht

$$3x = 4x - 24, \qquad x = 24,$$

$$3x = -4x - 24, \quad x = \frac{24}{7}.$$

Nach der ersten Auflösung der Aufgabe, hat der erste Arbeiter 24 Tage hindurch gearbeitet, und hat folglich gewonnen $\frac{96 \text{ Fr.}}{24}$, oder 4 Fr. täglich, während daß der zweite nur 18 Tage gearbeitet, und $\frac{54 \text{ Fr.}}{24}$, oder 3 Fr. täglich verdient hat.

Die zweite Auflösung entspricht einer andern numerischen Aufgabe, die mit der vorgegebenen Gleichung auf eine der in §. 111. bemerkten analogen Art verbunden ist.

§. 118.

Einem Banquier werden zum Diskomptiren zwei Wechsel, auf die nämliche Person lautend, angetragen; der eine ist von 550 Franken, zahlbar nach sieben Monat, der andere von 720 Franken, zahlbar nach vier Monat. Der Banquier zahlt für beide 1200 Franken. Man fragt, zu wie viel Procent jährlicher Zinsen er diese Wechsel diskomptirt hat?

Um die Brüche in dem Ausdruck der Zinsen für sieben und vier Monat zu vermeiden, werde ich die jährlichen Zinsen von 100 Franken mit $12x$ bezeichnen, alsdann wird x der Zins von einem Monat sein. Auf diese Art wird der jetzige Werth des ersten Wechsels durch folgende Proportion erhalten:

$$100 + 7x : 100 = 550 : \frac{55000}{100 + 7x} \text{ (Arithm. 120.);}$$

der jetzige Werth des zweiten Wechsels wird eben so aus der Proportion hervorgehen

$$100 + 4x : 100 = 720 : \frac{72000}{100 + 4x}.$$

Vereinigen wir diese beiden Werthe, so wird die Gleichung dieser Aufgabe sein:

$$\frac{55000}{100 + 7x} + \frac{72000}{100 + 4x} = 1200.$$

Da beide Seiten sich durch 200 dividiren lassen, so hat man

$$\frac{275}{100 + 7x} + \frac{360}{100 + 4x} = 6;$$

schafft man nun die Nenner weg, so findet man nach und nach

$$275(100+4x)+360(100+7x)=6(100+7x)(100+4x)$$
$$27500 + 1100x + 36000 + 2520x =$$
$$60000 + 6600x + 168x^2,$$

welches sich reducirt auf

$$168x^2 + 2980x = 3500;$$

alle durch 2 dividirt, giebt

$$84x^2 + 1490x = 1750,$$

welches endlich giebt

$$x^2 + \frac{1490}{84}x = \frac{1750}{84}.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Formel

$$x^2 + px = q,$$

so kommt

$$p = \frac{1490}{84}, \quad q = \frac{1750}{84},$$

und der Ausdruck

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

verändert sich in

$$x = -\frac{745}{84} \pm \sqrt{\frac{745 \cdot 745}{84 \cdot 84} + \frac{1750}{84}}.$$

Zuerst muß man die unter dem Wurzelzeichen stehenden Brüche in einen einzigen verwandeln: so wird man haben

$$\frac{745 \cdot 745 + 1750 \cdot 84}{84 \cdot 84} = \frac{702025}{84 \cdot 84};$$

und da der Nenner dieses Bruchs ein vollkommenes Quadrat ist, so bleibt nur übrig die Wurzel aus dem Zähler zu ziehen. Bleibt man bei den Tausendtheilen stehen, so findet man 837,869 als die Quadratwurzel aus 702025; und wenn wir ihm den Nenner 84 geben, so sind die Werthe von x

$$x = -\frac{745}{84} + \frac{837{,}896}{84} = \frac{92{,}869}{84},$$

$$x = -\frac{745}{84} - \frac{837{,}869}{84} = -\frac{1582{,}869}{84}.$$

Der erste von diesen Werthen ist der einzige, der die Aufgabe in dem Sinne ihrer Aussage auflöst. Dividiren wir seinen Nenner mit 12, so hat man (Arithm. 54.)

$$12x = \frac{92{,}869}{7} = 13{,}267;$$

d. h. der jährliche Zins beträgt 13, 27 p. $\frac{0}{0}$ *).

§. 119.

Die folgende Aufgabe ist, wegen der Umstände, welche der Ausdruck von der unbekannten Größe darbietet, aller Aufmerksamkeit werth.

Eine Zahl in zwei Theile zu theilen, deren Quadrate in einem gegebenen Verhältniß stehen.

Es sei a die gegebene Zahl,

m der Verhältnißnahme der Quadrate dieser zwei Theile,

x einer von diesen Theilen;

so wird der andere sein $a - x$;

und nach der Aussage der Aufgabe wird man die Gleichung haben

$$\frac{x^2}{(a - x)(a - x)} = m.$$

Sie aufzulösen zeigen sich zwei Wege: man kann sie entweder vorbereiten, um ihr die Form $x^2 + px = q$ zu geben, und sie nachgehends nach der allgemeinen Methode

---

*) Die Natur der Aufgabe verlangt, daß der Banquier die jährlichen Zinsen abzieht. Wollte man aber den negativen Werth von x annehmen, so würde das Entgegengesetzte statt finden müssen, nämlich der Banquier müßte, statt die Zinsen abzuziehen, solche vielmehr dem Inhaber der Wechsel geben, welches doch ganz gewiß gegen den richtigen Sinn des Geschäfts ist.

Gruson.

auflösen; oder auch, indem man die leicht zu machende Bemerkung benutzt, daß der Bruch

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}$$

ein Quadrat ist, weil sein Zähler und sein Nenner Quadrate sind, so schließt man daraus zur Stelle,

$$\frac{x}{a-x} = \pm\sqrt{m},$$

$$x = \pm(a-x)\sqrt{m}.$$

Wenn wir die zwei Gleichungen vom ersten Grade, die in dieser Formel enthalten sind, jede für sich auflösen, nämlich:

$$x = +(a-x)\sqrt{m},$$

$$x = -(a-x)\sqrt{m},$$

so zieht man daraus

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$

$$x = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Durch die erste Auflösung ist der zweite Theil der gegebenen Zahl

$$a - \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

und die zwei Theile

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \quad \text{und} \quad \frac{a}{1+\sqrt{m}}$$

sind, wie es die Aufgabe verlangt, beide kleiner als die gegebene Zahl.

Durch die zweite Auflösung hat man

$$a + \frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a-a\sqrt{m}+a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-\sqrt{m}},$$

und die zwei Theile sind alsdann

$$-\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \quad \text{und} \quad \frac{a}{1-\sqrt{m}}.$$

Da ihre Zeichen entgegengesetzt sind, so ist a auch eigentlich nicht mehr ihre Summe, sondern ihre Differenz.

Wenn man $m = 1$ macht, d. h. annimmt, die Quadrate der beiden gesuchten Theile seien gleich, so hat man

$$\sqrt{m} = 1;$$

die erste Auflösung giebt zwei gleiche Theile,

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2},$$

ein durch sich selbst einleuchtendes Resultat, während die zweite Auflösung zwei unendliche Werthe giebt (§. 68.), nämlich

$$\frac{-a}{1-1} \text{ oder } \frac{-a}{0}, \text{ und } \frac{a}{1-1} \text{ oder } \frac{a}{0},$$

welches sein muß; denn nur wenn man zwei Größen in Vergleich mit ihrer Differenz als unendlich groß ansieht, kann man annehmen, daß das Verhältniß ihrer Quadrate gleich 1 ist.

In der That, es seien x und $x - a$ diese zwei Größen, so wird das Verhältniß ihrer Quadrate sein

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2},$$

und wenn man die beiden Glieder dieses Bruchs mit x^2 dividirt, so wird er

$$\frac{1}{1 - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}};$$

es ist aber sichtbar, daß je größer x, desto kleiner die Brüche $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$ sein werden, und daß desto mehr das obige Verhältniß sich der Gleichheit von $\frac{1}{1}$ oder 1 annähern werde.

§. 120.

Um jetzt den genommenen Weg mit der allgemeinen Methode zu vergleichen, entwickelt man die Gleichung

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)} = m:$$

und man wird nach und nach haben

$$x^2 = m(a-x)(a-x),$$
$$x^2 = a^2 m - 2amx + mx^2,$$
$$x^2 - mx^2 + 2amx = a^2 m,$$
$$(1-m)x^2 + 2amx = a^2 m,$$
$$x^2 + \frac{2amx}{1-m} = \frac{a^2 m}{1-m};$$

setzen wir $p = \frac{2am}{1-m}$, $q = \frac{a^2 m}{1-m}$,

so wird die allgemeine Formel geben

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \sqrt{\frac{a^2 m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2 m}{1-m}}.$$

Diese Werthe von x scheinen von den oben gefundenen sehr verschieden zu sein; demungeachtet lassen sie sich darauf zurückführen, und in dieser Hinsicht kann das uns beschäftigende Beispiel nützlich sein, um die Wichtigkeit der Transformationen zu zeigen, welche die verschiedenen algebraischen Operationen in den Ausdrücken der Größen hervorbringen.

Man bringe zuerst die zwei unter dem Wurzelzeichen stehenden Brüche unter einerlei Nenner, welches durch die Multiplication der beiden Glieder des zweiten Bruchs mit $1-m$ geschehen kann; und es wird kommen

$$\frac{a^2 m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2 m}{1-m} = \frac{a^2 m^2 + a^2 m(1-m)}{(1-m)(1-m)} =$$
$$\frac{a^2 m^2 + a^2 m - a^2 m^2}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2 m}{(1-m)(1-m)}.$$

Da der Nenner ein Quadrat ist, so bleibt nur die Wurzel aus dem Zähler zu ziehen übrig, und man wird haben

$$\sqrt{\frac{a^2 m^2}{(1-m)(1-m)}} + \frac{a^2 m}{1-m} = \frac{\sqrt{a^2 m}}{1-m};$$

aber der Ausdruck $\sqrt{a^2 m}$ läßt sich noch vereinfachen.

Es ist sichtbar, daß das Quadrat eines Products aus den Quadraten seiner Factoren besteht, weil z. B.

$$bcd \times bcd = b^2 c^2 d^2,$$

und daß folglich die Wurzel aus $b^2 c^2 d^2$ nichts anders ist als das Product der Wurzeln b, c und d aus den Factoren a^2, b^2 und d^2. Wenden wir diese Bemerkung auf das Product $a^2 m$ an, so sieht man, daß seine Wurzel das Product von a, Wurzel aus a^2, und von $\sqrt{m}$ ist, welches die Anzeige der Wurzel aus m ist, oder daß

$$\sqrt{a^2 m} = a\sqrt{m}.$$

Aus diesen verschiedenen Verwandlungen folgt nun, daß

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m},$$

oder auch

$$x = -\frac{am - a\sqrt{m}}{1-m},$$

$$x = -\frac{am + a\sqrt{m}}{1-m}.$$

So einfach diese Ausdrücke auch sein mögen, so sind sie doch noch nicht die Ausdrücke des vorhergehenden §.; und selbst wenn man sie für den Fall, wo $m = 1$, prüfen wollte, so werden sie

$$x = \frac{-a+a}{1-1} = \frac{0}{0},$$

$$x = \frac{-a-a}{1-1} = \frac{-2a}{0}.$$

In der zweiten findet man wieder das Symbol des Unendlichen, wie vorher, aber die erste giebt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, von der man schon Beispiele in §. 69. und 70. gesehen hat; und bevor man über ihren Werth abspricht, ist es rathsam, nachzusehen, ob sie nicht zu dem Fall in §. 70. gehört: ob es nicht etwa ein gemeinschaftlicher Factor im Zähler und Nenner ist, welchen die Annahme von $m=1$ zu Null macht.

Der Ausdruck $\frac{-am + a\sqrt{m}}{1-m}$

ist einerlei mit $\frac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m} = \frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}$.

Man sieht schon, daß der Zähler nur durch den Factor $\sqrt{m}-m$ zu Null wird; man muß also sehen, ob der letztere nicht irgend einen gemeinschaftlichen Factor mit dem Nenner $1-m$ hat. Um das Hinderniß zu vermeiden, welches das Wurzelzeichen verursachen könnte, so mache ich $\sqrt{m}=n$, und schließe hieraus, indem ich die Quadrate nehme, $m=n^2$; dieses setzt die Größen

$$\sqrt{m}-m \text{ und } 1-m$$

um in $$n-n^2 \text{ und } 1-n^2;$$

aber $n-n^2=n(1-n)$ und $1-n^2=(1-n)(1+n)$ (§. 34.); würde sein Werth für n gesetzt, so hat man

$$\sqrt{m}-m=(1-\sqrt{m})\sqrt{m},$$
$$1-m=(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})$$

und folglich

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}=\frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$

ein Resultat, welches ähnlich dem in §. 119. ist.

Eben so reducirt man den zweiten Werth von x, indem man bemerkt, daß

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m}=\frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m}}=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$$

wie in §. 119. *).

Es ist nicht schwer einzusehen, daß die Wurzelgrößen in den vorhergehenden Rechnungen hätten vermieden werden

*) Dieses hier so weitläuftig abgehandelte Beispiel entspricht einer durch Clairaut in seiner Algebra aufgelösten Aufgabe, und die so vorgetragen ist: Wenn der Abstand oder die gerade Linie zwischen zwei Lichtern von verschiedener Hellung gegeben ist, den Punct in dieser Linie zu finden, wo beide Lichter gleiche Beleuchtung hervorbringen. Ich habe dieses Beispiel ohne diese physischen Umstände vorgetragen, weil solche nicht in diese Anfangsgründe gehören, und weil sie nur die Aufmerksamkeit, welche die in sich selbst sehr merkwürdigen algebraischen Umstände heischen, stören können, und aus dieser Ursache habe ich mehr entwickelt, als Clairaut nicht gethan hat.

können, wenn man durch m^2 das Verhältniß der Quadrate der beiden Theile von der gegebenen Zahl vorstellte: alsdann wäre m die Quadratwurzel gewesen, die man immer als bekannt ansehen kann, wenn ihr Quadrat gegeben ist; man hätte aber nicht sogleich den Zweck einer solchen Veränderung der gegebenen Größen eingesehen, deren sich die Algebraisten zur Vereinfachung ihres Calculs bedienen; deshalb lade ich die Anfänger ein, die Auflösung nochmals unter der Annahme m^2 statt m, vorzunehmen.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel aus algebraischen Größen.

§. 121.

Die vorige Aufgabe ist hinreichend, um daraus abzunehmen, wie man sich bei Buchstabenausdrücken benehmen muß, um die Wurzel auszudrücken; sie hat zu einer bemerkenswerthen Transformation Anlaß gegeben, nämlich der Ausdrücke

$$\sqrt{a^2 m} \quad \text{in} \quad a\sqrt{m} \quad \text{(§. 132.)}$$

Durch dieses Mittel kann man die unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Factoren auf die möglich kleinste Zahl bringen und dadurch die noch zu machende Wurzelausziehung selbst sehr vereinfachen.

Diese Umwandlung besteht, wie man an gedachten Orten gesehen hat, darin: **daß man die Quadratwurzel von jedem Factor, welcher ein Quadrat ist, insbesondere nimmt, und solche Wurzeln als Factoren des Wurzelzeichens außerhalb des Wurzelzeichens schreibt, unter welchem die Factoren, die keine Quadratzahlen sind, unverändert gelassen werden.**

Diese Regel setzt voraus, daß man erkenne, ob und welche algebraische Größe ein richtiges Quadrat ist, aus der man alsdann sofort die Wurzel auszieht; und deshalb ist es nöthig, die Monomen von den Polynomen zu unterscheiden.

§. 122.

Aus der Regel für die Exponenten bei der Multiplication folgt augenscheinlich, daß die zweite Potenz einer beliebigen Größe einen doppelt so großen Exponenten hat, als diese Größe.

So hat man z. B.

$a^1 \times a^1 = a^2$, $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^3 \times a^3 = a^6$ u. s. w.

Es folgt hieraus, daß jeder Factor, der ein Quadrat ist, einen geraden Exponenten haben muß, und daß die Wurzel aus solchem Factor eine Größe sei, die den halben Exponenten hat.

Man hat also

$\sqrt{a^2} = a^1$ oder a, $\sqrt{a^4} = a^2$, $\sqrt{a^6} = a^3$, u. s. w.

Aus numerischen Factoren wird die Quadratwurzel, wenn sie Statt findet, nach den vorhergegangenen Regeln gezogen.

So nun wird man einsehen, daß die Factoren a^6, b^4, c^2 des Ausdrucks

$$\sqrt{64\,a^6\,b^4\,c^2},$$

Quadrate sind; die Zahl 64 ist das Quadrat von 8; folglich, wenn der gegebene Ausdruck ein Product von Quadratfactoren ist, so wird man zur Wurzel das Product aus den Wurzeln eines jeden dieser Factoren haben (§. 121.); und demnach

$$\sqrt{64\,a^6\,b^4\,c^2} = 8\,a^3\,b^2\,c.$$

§. 123.

Wenn dieser Umstand nicht Statt hat, so muß man das gegebene Product in zwei andere zerlegen, von welchen das eine nur Quadratfactoren und das andere nur Factoren enthält, die keine Quadrate sind; und deshalb muß man jeden seiner Factoren besonders in Betrachtung ziehen.

Es sei z. B.

$$\sqrt{72\,a^4\,b^3\,c^5}.$$

Man erkennt leicht, daß unter den Theilern der Zahl 72 es einige giebt, welche Quadratzahlen sind, nämlich 4, 9 und 36; und wenn man den größten nimmt, so hat man

$$72 = 36 \times 2.$$

Da a^4 ein Quadrat ist, so übergeht man ihn; geht man nun zum Factor b^3, welcher kein Quadrat ist, weil 3 ungerade ist, so bemerkt man, daß dieser Factor in zwei andere, b^2 und b zerlegt werden kann, davon der erste ein Quadrat ist, und man also hat

$$b^3 = b^2 \times b;$$

man sieht auch, daß

$$c^5 = c^4 \times c;$$

eben so wird es mit jedem Buchstaben sein, der einen ungeraden Exponenten hat. Alle diese Zerlegungen geben

$$72\,a^4\,b^3\,c^5 = 36 \times 2\,a^4\,b^2 \times b\,c^4 \times c;$$

und wenn man die Quadratfactoren zusammen stellt, so kommt

$$36\,a^4\,b^2\,c^4 \times 2\,b\,c.$$

Endlich, wenn man die Wurzel aus dem ersten Product nimmt und die aus dem zweiten anzeigt, so hat man

$$\sqrt{72\,a^4\,b^3\,c^5} = 6\,a^2\,b\,c^2\sqrt{2\,b\,c}.$$

Hier noch einige Beispiele ähnlicher Reductionen nebst dem zu ihrer Einsicht nöthigen Calcul:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} = \sqrt{a^2\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{ab};$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}\,ab^2} = 6\sqrt{\frac{25\cdot 3\,ab^2}{49\cdot 2}} = 6\sqrt{\frac{25b^2\cdot 3a}{49\cdot 2}} =$$

$$\frac{6\cdot 5}{7}\,b\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30b}{7}\cdot\sqrt{\frac{6a}{4}}$$

$$= \frac{30b}{7\cdot 2}\cdot\sqrt{6a} = \frac{15b}{7}\sqrt{6a};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 m^2}{n^2} + \frac{a^2 m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2 m^2 + a^2 m n}{n^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2+mn)} = \frac{a}{n}\sqrt{m^2+mn} = \frac{a}{n}\sqrt{m^2\left(1+\frac{mn}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{ma}{n}\sqrt{1+\frac{n}{m}}.$$

In Betreff des ersten Beispiels muß bemerkt werden, daß man den Nenner der algebraischen Brüche unter dem Wurzelzeichen wegbringen kann, wenn man ihn, nach dem was darüber §. 104. für die Zahlenbrüche gesagt worden, quadrirt.

§. 124.

Wir wollen nun zur Ausziehung der Quadratwurzel aus Polynomen übergehen. Es ist wichtig, sich zu erinnern, daß kein Binomium ein Quadrat ist, weil jedes Monom, zum Quadrat erhoben, nur ein Monom giebt, und das Quadrat von einem Binom immer drei Glieder enthält (§. 34).

Man würde sich gröblich irren, wenn man für $\sqrt{a^2+b^2}$ das Binom $a+b$ nähme, obgleich a die Wurzel von a^2 und b die Wurzel von b^2, jede für sich genommen, ist; denn da das Quadrat von $a+b$, $a^2+2ab+b^2$ ist, so enthält es außerdem noch das Glied $+2ab$, welches in dem Ausdruck a^2+b^2 nicht vorhanden ist.

Es sei das Trinomium

$$24a^2b^3c + 16a^4c^2 + 9b^6.$$

Um in diesem Ausdruck die drei Theile, welche das Quadrat eines Binom ausmachen, aufzufinden, so ordne ich ihn nach einem seiner Buchstaben, z. B. nach dem Buchstaben a; es kommt

$$16a^4e^2 + 24a^2b^3c + 9b^6.$$

Welches nun auch die gesuchte Wurzel sein mag, so muß, nimmt man sie nach demselben Buchstaben a geordnet an, das

Quadrat von ihrem ersten Gliede nothwendig das erste Glied $16a^4c^2$ der gegebenen Größe bilden; das doppelte Product vom ersten Gliede der Wurzel mit dem zweiten muß das zweite Glied $24a^2b^3c$ der vorgelegten Größe geben; und endlich muß das Quadrat des letzten Gliedes der Wurzel genau das letzte Glied $9b^6$ der obigen Größe geben. Nach diesen Betrachtungen wird nun die Operation folgendermaßen angeordnet:

$$\begin{array}{l|l} 16a^4c^2 + 24a^2b^3c + 9b^6 & \left\{\begin{array}{l} 4a^2c + 3b^3 \\ 8a^2c + 3b^3 \end{array}\right. \text{Wurzel} \\ -16a^4c^2 & \\ \hline +24a^2b^3c + 9b^6 & \\ -24a^2b^3c - 9b^6 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Zuerst ziehe ich die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede $16a^4c^2$, und das Resultat $4a^2c$ (§. 122.) ist das erste Glied der Wurzel, welches rechts geschrieben wird, in gerader Linie mit der gegebenen Größe.

Von dieser gegebenen Größe ziehe ich ab das Quadrat $16a^4c^2$ aus dem ersten Gliede der Wurzel, so bleiben nach der Reduction nur noch die zwei Glieder $24a^2b^3c + 9b^6$.

Da das Glied $24a^2b^3c$ das doppelte Product aus dem ersten Gliede der Wurzel $4a^2c$ mit dem zweiten ist, so erhalte ich dieses letztere, indem ich $24a^2b^3c$ mit $8a^2c$, dem Doppelten von $4a^2c$, dividire, und unter die Wurzel schreibe; der Quotient $3b^3$ ist das zweite Glied der Wurzel.

Jetzt ist die Wurzel bestimmt; wenn sie aber die wahre sein soll, so muß der Quotient des zweiten Gliedes $9b^6$ betragen, oder es muß das Doppelte $8a^2c$ des ersten Wurzelgliedes, um das zweite $3b^3$ vermehrt, und die Summe mit dem zweiten multiplicirt, die zwei letzten Glieder vom Quadrat erzeugen (§. 91.); demzufolge schreibe ich $+3b^3$ neben $8a^2c$ und multiplicire $8a^2c + 3b^3$ mit $3b^3$; da dieses Product,

von den beiden letzten Gliedern abgezogen, keinen Rest läßt, so schließe ich hieraus, daß diese Größe das Quadrat von $4a^2c + 3b^3$ ist.

Es leuchtet ein, daß die nämlichen Schlüsse und dieselben Vergleichungen sich auf alle dreigliedrige Größen anwenden lassen.

§. 125.

Wenn die Größe, aus der die Wurzel gezogen werden soll, mehr als drei Glieder enthält, so kann sie nicht das Quadrat von einer zweigliedrigen Wurzel sein. Nimmt man aber an, sie sei das Quadrat eines Trinom $m + n + p$, und stellt durch l die Summe $m+n$ von ihren beiden ersten Gliedern vor, so ändert sich dieses Trinom um in $l + p$, und sein Quadrat wird

$$l^2 + 2lp + p^2,$$

wo das Quadrat l^2 des Binom $m+n$, wenn es entwickelt wird, die Glieder $m^2 + 2mn + n^2$ erzeugt. Hat man nun eine vorgegebene Größe geordnet, so wird das erste Glied augenscheinlich das Quadrat vom ersten Gliede der Wurzel sein, und das zweite wird das doppelte Product vom ersten Gliede der Wurzel mit dem zweiten dieser Wurzel enthalten; man wird also dieses letzte erhalten, wenn man das zweite Glied der vorgegebenen Größe durch das Doppelte der Wurzel des ersten dividirt. Da man nun die zwei ersten Glieder der gesuchten Wurzel kennt, so ergänzt man das Quadrat dieser zwei hier durch l^2 vorgestellten Glieder, und zieht es von der vorgegebenen Größe ab; es wird bleiben

$$2lp + p^2,$$

eine Größe, welche das doppelte Product von l oder vom ersten Binom $m + n$ mit dem Reste der Wurzel mehr das Quadrat von diesem Reste enthält, und zeigt, daß man mit diesem Binom eben so verfahren muß, wie man es mit dem ersten Gliede m von der Wurzel gemacht hat.

Es sei z. B. die Größe

$64a^2bc + 25a^2b^2 - 40a^3b + 16a^4 + 64b^2c^2 - 80ab^2c$;

ich ordne sie nach nach dem Buchstaben a und mache die Stellung der Operation wie vorher

$$\begin{array}{l|l}
16a^4 - 40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 & 4a^2 - 5ab + 8bc \\
\quad + 64a^2bc & \hline
-16a^4 & 8a^2 - 5ab \\
\hline
1^{\text{r}}\text{ Rest. } -40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 & 8a^2 - 10ab + 8bc \\
\quad + 64a^2bc & \\
\quad + 40a^3b - 25a^2b^2 & \\
\hline
2^{\text{r}}\text{ Rest} \ldots\ldots\ldots + 64a^2bc - 80ab^2c + 64b^2c^2 & \\
\quad - 64a^2bc + 80ab^2c - 64b^2c^2 & \\
\hline
\end{array}$$

o o o

Hierauf ziehe ich die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede $16a^4$, erhalte $4a^2$ als erstes Glied der gesuchten Wurzel nud bilde daraus das Quadrat, welches ich von der vorgegebenen Größe abziehe.

Ich verdoppele das erste Glied der Wurzel und schreibe das Resultat $8a^2$ darunter, mit welchem ich das Glied $-40a^3b$, womit der erste Rest anfängt, dividire; ich habe $-5ab$ als zweites Glied der Wurzel; ich schreibe es neben $8a^2$, multiplicire das Ganze durch dieses zweite Glied, und ziehe das Resultat von dem ersten Reste ab.

Auf diese Art habe ich von der vorgegebenen Größe das Quadrat des Binom $4a^2 - 5ab$ abgezogen; da der zweite Rest nur noch das doppelte Product aus diesem Binom mit dem dritten Gliede der Wurzel und das Quadrat dieses Gliedes enthält, so verdoppele ich die Größe $4a^2 - 5ab$, welches giebt

$$8a^2 - 10ab,$$

die ich unter $8a^2 - 5ab$ schreibe und als Divisor des zweiten Restes nehme. Das erste Glied des Quotienten, das $8bc$ ist, ist das dritte Wurzelglied.

Ich schreibe ihn ebenfalls neben $8a^2 - 10ab$ und

multiplicire das Ganze durch dieses Glied; ich ziehe die Producte vom zweiten Reste ab, der nun ganz vernichtet wird; die vorgegebene Größe ist also das Quadrat von

$$4a^2 - 5ab + 8bc.$$

Jetzt ist es leicht, das obige Verfahren, welches übrigens vollkommen dem bei den Zahlen gezeigten ähnlich ist, so weit fortzusetzen, wie man beliebt.

Von der Bildung der Potenzen und Ausziehung der Wurzeln aus denselben.

§. 126.

Die arithmetische Operation, wovon die Auflösung der quadratischen Gleichungen abhängt, und wodurch man vom Quadrat zu der Größe zurückkommt oder zur Quadratwurzel, aus welcher es gebildet ist, ist nur ein besonderer Fall von einer viel allgemeinern, welche darin besteht: **die Zahl selbst zu finden, von der eine beliebige Potenz angegeben ist.** Man begreift, daß diese Operation, die auf ein Resultat führt, welches ebenfalls mit dem Namen **Wurzel** bezeichnet wird, dabei man aber noch den Potenzengrad von dieser Wurzel angiebt, das Entgegengesetzte von derjenigen ist, welche die Potenz finden lehrt, und nur aus der Erwägung der Umstände von dieser letztern Größe abgeleitet werden kann, wie solches für die Division in Bezug der Multiplication geschieht, mit welchen Umständen dieser Gegenstand übrigens Beziehungen hat, die man bald wahrnehmen wird.

Durch die Multiplication gelangen wir zu den Potenzen der ganzen Zahlen (§. 24.), und es ist sichtlich, daß die der Brüche sich bilden, wenn man ihre Zähler und ihre Nenner zu der verlangten Potenz erhebt (§. 96).

Umgekehrt ergiebt sich die Wurzel von einem beliebigen Grade aus einem Bruche, wenn man sie aus dem Zähler und aus dem Nenner nimmt.

Da der Gebrauch der algebraischen Symbole sehr bequem ist, um alles auszudrücken, was von der Zusammensetzung und Zerlegung der Größen abhängt, so wollen wir zuerst die Bildung der Potenzen von algebraischen Ausdrücken wahrnehmen; denn in Betreff der Potenzen von Zahlen ist das, was §. 24. gesagt worden, hinreichend, um sie zu finden.

Tafel

der sieben ersten Potenzen der Zahlen von 1 bis 9.

1ste	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2te	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3te	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4te	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5te	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6te	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7te	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Die vorstehende Tafel ist hier eingerückt worden, um zu zeigen, wie schnell die Potenzen der Zahlen wachsen, wenn sie zu höhern Graden aufsteigen; diese Bemerkung ist sehr wichtig für die Folge. So ist die siebente Potenz von 2 schon 128, und die von 9 ist 4782969.

Man begreift auch hieraus leicht, daß die Potenzen von eigentlichen Brüchen sehr schnell abnehmen, weil die Potenzen des Nenners viel schneller als die des Zählers zunehmen.

Z. B. die siebente Potenz von $\frac{1}{2}$ wäre $\frac{1}{128}$,

" " " " " $\frac{1}{9}$ " $\frac{1}{4782969}$,

" " " " " $\frac{1}{81}$ " $\frac{1}{2287679245496 1}$.

§. 127.

Aus dem, daß in einem Product jeder Buchstabe zum Exponenten die Summe der Exponenten hat, welche er in jedem Factor hat (§. 26.), folgt, daß die Potenz einer eingliedrigen Größe gebildet wird, wenn man den Exponenten von jedem Factor durch den Exponenten dieser Potenz multiplicirt.

So z. B. wird die dritte Potenz von $a^2 b^3 c$ erhalten, wenn man die Exponenten 2, 3 und 1, der Buchstaben a, b, c, mit dem Exponenten 3 der verlangten Potenz multiplicirt: das giebt $a^6 b^9 c^3$; und in der That, diese Potenz ist einerlei mit

$$a^2 b^3 c \times a^2 b^3 c \times a^2 b^3 c = a^{2.3} b^{3.3} c^{1.3}$$

Wenn die gegebene Größe einen Zahlen-Coefffcienten hat, so müßte auch dieser Coefficient auf die verlangte Potenz erhoben werden; also die vierte Potenz von $3 a b^2 c^5$ ist

$$81 a^4 b^8 c^{20},$$

weil 81 die vierte Potenz von 3 ist.

§. 128.

Wegen der Zeichen, die mit den eintheiligen Größen angegeben werden, ist zu merken, daß jede Potenz von einem geraden Exponenten das Zeichen + erhalte; die Potenzen aber, deren Exponent ungerade ist, erhalten das Zeichen der Wurzelgröße selbst.

Denn die geraden Potenzen entstehen aus der Multiplication einer geraden Zahl gleicher und mit dem nämlichen Zeichen versehener Factoren; die Zeichen —, zu 2 und 2 verbunden, geben in der Multiplication immer dem Product das Zeichen + (§. 31). Im Gegentheil, wenn die Zahl der Factoren ungerade ist, so wird das Product das Zeichen — haben, wenn die Factoren damit behaftet sind, weil es aus dem Producte von einer geraden Zahl von Factoren, und

folglich positiv, multiplicirt mit einem negativen Factor, hervorgeht.

§. 129.

Um von der Potenz zu der Größe, woraus sie gebildet worden, oder zu ihrer Wurzel zurück zu kommen, darf man nur die oben gegebenen Regeln umkehren, d. h. den Exponenten von jedem Buchstaben mit dem Exponenten dividiren, der den Grad der Wurzel, die man ausziehen will, anzeigt.

Auf diese Art wird man die Kubikwurzel oder die vom dritten Grade aus dem Ausdruck $a^6 b^9 c^3$ finden, indem man die Exponenten 6, 9 und 3 durch 3 dividirt, welches geben wird

$$a^2 b^3 c.$$

Hat der gegebene Ausdruck einen Zahlencoefficienten, so muß man daraus ebenfalls die Wurzel ziehen, um den Coefficienten der Buchstabengröße, die man durch die vorhergehende Größe erhält, zu bilden.

Verlangte man z. B. die vierte Wurzel von $81 a^4 b^8 c^{20}$, so wird man aus der Tafel in §. 126. sehen, daß 81 die vierte Potenz von 3 ist; und wenn man die Exponenten der Buchstaben mit 4 dividirt, so hätte man als Resultat

$$3 a b^2 c^5.$$

In den Fällen, wo die Wurzel des Zahlencoefficienten sich nicht durch die gedachte Tafel finden läßt, zieht man sie nach der Methode aus, die ich weiterhin geben werde.

§. 130.

Es leuchtet ein, daß die Wurzelausziehung sich nur bei den Potenz-Exponenten der Buchstaben anbringen lasse, die durch den Wurzelexponenten theilbar sind; im entgegengesetzten Falle muß man die Ausziehung nur anzeigen, welches dann die arithmetische Arbeit bezeichnet, welche mit den Zah-

len, die durch die Buchstaben vorgestellt waren, vorgenommen werden muß.

Man bedient sich dazu noch des Zeichens $\sqrt{\ }$; um aber den Wurzelgrad anzuzeigen, setzt man den Exponenten, wie man hier unten in den Ausdrücken

$$\sqrt[3]{a}, \qquad \sqrt[5]{a^2}$$

sieht, davon der erste die Kubikwurzel oder die des dritten Grades von a, und der zweite die fünfte Wurzel von a^2 anzeigt.

Die mit dem Zeichen $\sqrt{\ }$ behafteten Ausdrücke, von welchem Grade sie auch sein mögen, können öfters vereinfacht werden, wenn man bedenkt, daß nach §. 127. eine jede Potenz von einem Producte gebildet ist aus dem Producte der nämlichen Potenz eines jeden der Factoren, und daß folglich jede Wurzel eines Products gebildet ist aus dem Producte der Wurzeln desselben Grades aus jedem von seinen Factoren. Aus diesem letztern Princip geht hervor, daß wenn die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe Factoren hat, welche vollkommene Wurzeln desselben Grades, als das Wurzelzeichen hat, sind, so kann man aus jedem dieser Factoren die Wurzel noch besonders ausziehen und ihr Product mit der aus den andern Factoren angezeigten Wurzel multipliciren.

Es sei z. B.

$$\sqrt[6]{96\, a^5 b^7 c^{11}}.$$

Man sieht, daß

$$96 = 32 \times 3 = 2^5 \cdot 3,$$

daß a^5 die fünfte Potenz von a ist,

daß $b^7 = b^5 \cdot b^2$,

daß $c^{11} = c^{10} \cdot c$;

man hat folglich

$$96\, a^5 b^7 c^{11} = 2^5 a^5 b^5 c^{10} \times 3 b^2 c.$$

Da

Da der erste Factor, als fünfte Wurzel, die Größe $2abc^2$ hat, so kommt

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}} = 2abc^2\sqrt[5]{3b^2c}.$$

§. 131.

Da jede gerade Potenz das Zeichen + haben muß (§. 128.), so kann keine mit dem Zeichen — behaftete Größe eine gerade Potenz sein und hat keine Wurzel dieses Grades. Es folgt hieraus, daß jede gerade Wurzel aus einer negativen Größe ein imaginairer Ausdruck ist:

$$\sqrt[4]{-a}, \quad \sqrt[6]{-a^4}, \quad b+\sqrt[8]{-ab^7}$$

sind imaginaire Ausdrücke.

Man kann folglich die Wurzeln von geraden Exponenten nur aus positiven Größen und zwar entweder genau oder durch Näherung angeben; und diese Wurzeln können sowohl mit dem Zeichen + als mit dem Zeichen — behaftet sein, weil sie in beiden Fällen die vorgegebene Größe mit dem Zeichen + wieder geben, und man nur nicht weiß, zu welchem von den beiden Fällen sie gehören.

Es verhält sich nicht so mit den ungeraden Graden, in welchen die Potenzen dasselbe Zeichen wie ihre Wurzeln haben (§. 128). Man muß den Wurzeln von diesen Graden das Zeichen geben, womit die Potenz behaftet ist, und es giebt in diesem Falle keine imaginaire.

§. 132.

Es ist hier der Ort, zu bemerken, daß die Anwendung der in §. 129. gegebenen Regel zur Wurzelausziehung aus Monomen, vermittelst der Exponenten ihrer Factoren, ganz natürlich auf eine für die Rechnung bequemere Bezeichnung als durch das Zeichen $\sqrt{\ }$ führt, wenn man nämlich die Wurzel nicht genau algebraisch ausziehen kann.

Wird z. B. die Wurzel des dritten Grades von a^5 verlangt, so müßte man, nach der dortigen Regel, den Exponenten

5 mit 3 dividiren; allein da die Division nicht aufgeht, so erhält man $\frac{5}{3}$, und diese Bruchform des Exponenten giebt an, daß die Wurzelausziehung bei dem gegebenen Exponenten nicht thunlich war. Die Ausdrücke

$$\sqrt[3]{a^5} \quad \text{und} \quad a^{\frac{5}{3}}$$

sind daher gleichgeltend.

Der letztere hat jedoch vor dem ersten den Vorzug, sofort zu derjenigen Vereinfachung zu führen, deren die Größe $\sqrt[3]{a^5}$ fähig ist; denn wenn man das Ganze, welches in dem Bruche $\frac{5}{3}$ enthalten ist, herausnimmt, so hat man $1 + \frac{2}{3}$, und sieht man diese Summe als den Exponenten eines Products an (§. 25.), so erkennt man, daß die Größe

$$a^{\frac{5}{3}} = a^{1+\frac{2}{3}} = a^1 \times a^{\frac{2}{3}}$$

aus zwei Factoren zusammengesetzt ist, davon der erste a und der andere $\sqrt[3]{a^2}$ ist.

Dasselbe wird man aus dem Ausdrucke $\sqrt[3]{a^5}$ mittelst §. 130. folgern, aber der Brucherponent führt unmittelbar dahin. Man wird überdem Gelegenheit haben, in andern Operationen die Vorzüge der Brucherponenten zu erkennen.

Für jetzt genügt es, zu bemerken: da die Division der Exponenten in dem Falle, wo sie ausgeführt werden kann, der Wurzelausziehung entspricht, so muß man, wenn sie angezeigt ist, sie als das Symbol der nämlichen Operation ansehen und hieraus schließen, daß die Ausdrücke

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{und} \quad a^{\frac{m}{n}}$$

gleichgeltend sind.

Die angenommenen Conventionen über die Art, die Potenzen auszudrücken, führen abermals durch Analogie und durch Ausdehnung zu besondern Symbolen, wie man in §. 37. zu dem Ausdruck $a^0 = 1$ gekommen ist.

§. 133.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, daß, wenn die Regel der Exponenten, in Bezug auf die Division (§. 36), den Regeln der Zeichen gemäß, die bei der Subtraction gelten (§. 20.), angewendet wird, sie auch für eine gewisse Klasse von Brüchen zu neuen Ausdrücken führet.

Man hat in der That nach diesen Regeln

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

wenn aber der Exponent n des Nenners den Exponenten des Zählers übertrifft, so wird der Exponent von dem Buchstaben a auf der zweiten Seite negativ sein.

Wenn z. B. $m = 2$, $n = 3$, so wird man haben

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}.$$

Hätte man aber den Bruch $\frac{a^2}{a^3}$ vereinfacht, so findet man $\frac{1}{a}$; die Ausdrücke

$$\frac{1}{a} \quad \text{und} \quad a^{-1}$$

sind folglich gleichbedeutende Ausdrücke.

Allgemein hat man durch die Regel der Exponenten

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-m-n} = a^{-n};$$

und überdem

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n};$$

hieraus geht hervor, daß die Ausdrücke

$$\frac{1}{a^n} \quad \text{und} \quad a^{-n}$$

gleichbedeutend sind.

Wenn das Zeichen —, welches vor dem Exponenten n steht, in dem Sinne des §. 62. genommen wird, so zeigt es in der That, daß der vorgegebene Exponent aus einem Bruche

herkommt, dessen Nenner n Factoren a mehr als der Zähler enthält, welches allerdings $\frac{1}{a^n}$ ist; man kann also, wenn uns irgend einer von diesen Ausdrücken vorkommt, den andern setzen.

Nach diesen Gründen läßt sich die Größe $\frac{a^2 b^5}{c^2 d^3}$, wenn sie angesehen wird als

$$a^2 b^5 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d^3},$$

unter die Form

$$a^2 b^5 c^{-2} d^{-3}$$

bringen; d. h. man kann alle Factoren des Nenners im Zähler aufnehmen, wenn man ihren Exponenten das Zeichen — giebt.

Umgekehrt: Wenn eine Größe Factoren mit negativen Exponenten enthält, so setzt man sie in den Nenner, indem man ihrem Exponenten das Zeichen + giebt; so wird die Größe

$$a^2 b^5 c^{-2} d^{-3},$$

wieder

$$\frac{a^2 b^5}{c^2 d^3}.$$

Von Bildung der Potenzen complexer Größen.

§. 134.

Zuerst wird hier bemerkt, daß die Potenzen von complexen Größen dadurch angezeigt werden, daß man diese Größen in Klammern einschließt, an die man den Exponenten der Potenz gehörig schreibt. Z. B. der Ausdruck

$$(4a^2 - 2ab + 5b^2)^3$$

bezeichnet die dritte Potenz von der Größe $4a^2 - 2ab + 5b^2$. Man zeigt diese Potenz auch noch, wie hier unten, an:

$$\overline{4a^2 - 2ab + 5b^2}^3.$$

§. 135.

Die binomischen Größen sind nach den Monomen die einfachsten; wollte man jedoch die Bildung der Potenzen der Binomen von verschiedenen Graden durch successive Multiplicationen zu Stande bringen, so würde man auf diese Art für jede Potenz nur zu besondern Werthen kommen, wie die für die zweite und dritte, die ich in §. 34. aufgeführt habe. Man würde folgende Tafel bilden:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

u. s. w.

Man wird aber nicht leicht das Gesetz der Zahlencoefficienten von diesen Resultaten auffassen. Denkt man über das Verfahren der Multiplication nach, so wird man erkennen, daß die Zahlencoefficienten aus den Reductionen entstehen, welche die Gleichheit der Factoren, die eine Potenz bilden, herbeiführen. Wenn diese Reductionen nicht gemacht werden, so wird die Zusammensetzung der Producte viel einleuchtender.

Um diesen Zweck zu erreichen, ist es gut, die zweiten Glieder der Binominalfactoren verschieden anzunehmen, z. B.

$$x + a, \quad x + b, \quad x + c, \quad x + d, \quad \text{u. s. w.}$$

Indem man die hier folgenden Multiplicationen macht und alle mit einerlei Potenz von x behaftete Glieder in eine Säule stellt, so ist es leicht, zu finden, daß

$$\begin{array}{l} (x+a)(x+b) = x^2 + ax + ab \\ \qquad\qquad\quad + bx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + ax^2 + abx + abc \\ \qquad\qquad\qquad\quad + bx^2 + acx \\ \qquad\qquad\qquad\quad + cx^2 + bcx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + bx^3 + acx^2 + abdx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + cx^3 + adx^2 + acdx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + dx^3 + bcx^2 + bcdx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + bdx^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + cdx^2 \end{array}$$

Ohne mehr von diesen Producten zu machen, wird man schon das Gesetz ihrer Bildung erkennen.

Nehmen wir an, daß alle mit einerlei Potenz von x multiplicirten Glieder und, die in derselben Säule stehen, nur ein Glied ausmachen, wie z. B.

$$ax^3 + bx^3 + cx^3 + dx^3 = (a + b + c + d)x^3,$$

und so mit den andern, so wird man finden

1) In jedem Producte ein Glied mehr, als es Binomialfactoren hat.

2) Der Exponent von x im ersten Gliede ist der Anzahl der Binomialfactoren gleich, und nimmt in jedem folgenden Gliede um Eins ab.

3) Die höchste Potenz von x hat nur die Einheit als Coefficient; die darauf folgende oder diejenige, deren Exponent um Eins kleiner, ist multiplicirt mit der Summe aller zweiten Glieder der Binomen; die, welche einen um zwei Einheiten kleinern Exponenten hat, wird mit einem Factor multiplicirt, der aus der Summe aller möglichen Producte von je zwei aber verschiedenen zweiten Gliedern der Binomen besteht; die darauf folgende um drei Einheiten kleinere Potenz von x hat zum Coefficienten die Summe der möglichen Producte von je drei aber immer verschiedenen zweiten Gliedern der Binomen u. s. w.; endlich im letztern Gliede wird der Exponent von x gleich Null (§. 37), denn er bestehet aus dem höchsten, um so viel Einheiten vermindert, als Binomialfactoren in einander multiplicirt werden, und der Coefficient dieses Gliedes besteht aus dem Producte aller zweiten Glieder der Binomen.

Es ist leicht, einzusehen, daß die Form von diesen Producten allemal unter den nämlichen Gesetzen begriffen sein müsse, es mögen der Binomialcoefficienten so viele sein, als man wolle; allein es giebt noch einen andern Beweis, als diese Analogie.

§. 136.

Vorerst ist es gewiß, daß jedes Product dieser Art die successiven Potenzen von x enthalten muß, von derjenigen an, deren Exponent gleich der Anzahl der in einander multiplicirten Factoren, bis zu derjenigen, deren Exponent Null ist. Um aber einen allgemeinen Ausdruck dieses Rechnungsresultats zu haben, so sollen mittelst des Buchstaben m diese stufenmäßigen Potenzen von x bezeichnet werden, als:

$$x^m,\quad x^{m-1},\quad x^{m-2},\quad \text{u. s. w.,}$$

und mittelst der Buchstaben $A, B, C, \ldots\ldots\ldots\ldots Y$ sollen die Coefficienten ausgedrückt werden, welche zu den verschiedenen Potenzen von x gehören, nämlich A zur x^{m-1}, B zur x^{m-2} u. s. w. Weil aber die Anzahl der Glieder, die von den den Exponenten gegebenen besondern Werthen abhängt, überhaupt unbestimmt bleibt, so lange dieser Exponent nicht bestimmt ist, so kann man nur die ersten und die letzten Glieder des Ausdrucks schreiben und zeigt die fehlenden mittlern Glieder durch eine Reihe Puncte an.

So stellt also die Formel

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Y$$

das Product aus einer beliebigen Anzahl von m Binomialfactoren $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ u. s. w. vor.

Multiplicirt man sie mit einem neuen Factor $x+l$, so erscheint

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots \\ \quad + lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} + \ldots + lY \end{array}\right\}.$$

Hieraus wird nun sogleich anschaulich wahr, daß 1) wenn A die Summe aus m zweiten Gliedern a, b, c, d u. s. w. ist, so ist $A+l$ die Summe aus $m+1$ zweiten Gliedern a, b, c, $d \ldots l$, und daß folglich die diesem Coefficienten zugeschriebene Zusammensetzung für das Product vom Grade $m+1$ wahr sein wird, wenn sie für den Grad m wahr ist.

2) Wenn B die Summe aller möglichen Producte von je zwei verschiedenen zweiten Gliedern a, b, c, d u. s. w. der m Binomialfactoren ist, so ist $B+lA$ auch die Summe von allen möglichen Producten aus je zwei verschiedenen zweiten Gliedern a, b, c, d .... l der $m+1$ Binomialfactoren; denn A ist die Summe von m verschiedenen Zahlen a, b, c u. s. w., daher giebt lA die Summe ihrer Producte mit der neuen eingeführten Größe l. Die angezeigte Zusammensetzung wird also für den Grad $m+1$ wahr sein, wenn sie es für den Grad m ist.

3) Wenn C die Summe von allen möglichen aber verschiedenen Producten zu je drei Factoren aus m verschiedenen Zahlen a, b, c u. s. w. ist, so ist $C+lB$ die Summe aller möglichen aber verschiedenen Producte zu je drei Factoren aus $m+1$ verschiedenen zweiten Gliedern a, b, c .... l; weil, nach dem was vorhergehet, lB die Summe der Producte von je zwei und zwei der Zahlen a, b, c u. s. w. in die neue eingeführte Größe l multiplicirt. Die angezeigte Zusammensetzung wird also für den Grad $m+1$ wahr sein, wenn sie es für den m Grad ist.

Man sieht aber, daß diese Art zu schließen sich auf alle Glieder erstreckt, und daß das letzte, lY, das Product aus $m+1$ zweiten Gliedern der Binomen sein wird.

Da die in §. 135. gemachten Bemerkungen z. B. für den vierten Grad wahr sind, so werden sie nach dem, was wir gesehen haben, auch für den fünften, für den sechsten Grad wahr sein, und wenn man so von Grad zu Grad steigt, so werden sie allgemein für jeden Grad erwiesen sein.

Hieraus folgt, daß, wenn ein Product aus m Binomialfactoren von der Form $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ u. s. w. vorgestellt wird durch

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{u. s. w.},$$

A allezeit die Summe der m Buchstaben a, b, c u. s. w., B die Summe aller möglichen aber verschiedenen Producte von

je zwei dieser Größen, C die Summe aller möglichen aber verschiedenen Producte aus den gedachten Größen, zu je drei genommen, und so fort.

Um das Gesetz von diesem Ausdruck in eine einzige Form zu bringen, so werde ich von jenem Ausdruck ein unbestimmtes Glied betrachten, welches ich, dieser Ursache wegen, durch $N x^{m-n}$ vorstellen werde.

Dieses Glied wird das zweite sein, wenn man $n = 1$ macht; das dritte, wenn man $n = 2$ macht; das eilfte, wenn man $n = 10$ macht u. s. w. Im ersten Falle wird N die Summe der m Buchstaben a, b, c u. s. w. sein; im zweiten ist sie die Summe ihrer Producte von je zwei; im dritten, die ihrer Producte von je zehn, und überhaupt, die ihrer Producte von je n solcher Größen.

§. 137.

Um die Producte

$(x + a)(x + b)$, $(x + a)(x + b)(x + c)$,

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$ u. s. w.

in die Potenzen von $(x + a)$ zu verwandeln, nämlich in

$(x + a)^2$, $(x + a)^3$,

$(x + a)^4$, u. s. w.,

darf man nur in den Entwickelungen dieser Producte

$a = b$, $a = b = c$,

$a = b = c = d$, u. s. w.

machen.

Alle Größen, die einerlei Potenz von x multipliciren, werden alsdann einander gleich; der Coefficient des zweiten Gliedes, welches in dem Product

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$ gleich $a + b + c + d$

ist, verwandelt sich in $4a$; der Coefficient des dritten Gliedes in dem nämlichen Producte ist

$ab + ac + ad + bc + bd + cd$,

und wird $6a^2$; und hieraus ist es leicht abzunehmen, daß

die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x sich in eine einzige Potenz von a verwandeln, so viel mal genommen, als sie Glieder haben, und bezeichnet durch die Anzahl der in diesen Gliedern enthaltenen Factoren. Also wird der Coefficient N in der allgemeinen Entwickelung, welcher die Potenz x^{m-n} multiplicirt, die n^{te} Potenz von a oder a^n sein, so vielmal genommen, als man verschiedene Producte machen kann, wenn man m Buchstaben zu n Buchstaben auf jede mögliche Art verbindet. Es wäre also die Aufsuchung des Coefficienten des mit x^{m-n} verbundenen Gliedes auf die Anzahl dieser Producte zurückgebracht.

§. 138.

Um die Zahl, um welche es hier zu thun ist, zu finden, muß man die Anordnungen oder **Permutationen** von den Producten oder **Combinationen** unterscheiden. Zwei Buchstaben, a und b, geben zwar nur ein einziges Product, lassen aber zweierlei Anordnungen oder Verbindungen zu, ab und ba; drei Buchstaben, a, b, c, welche ebenfalls nur ein einziges Product geben, können sechs verschiedene Aenderungen erleiden (§. 88.) und so fort.

Um die Begriffe fest zu setzen, will ich annehmen, wir hätten überhaupt 9 Buchstaben

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,$$

und es werde verlangt, sie auf alle mögliche Arten zu 7 und 7 zu verbinden. Es ist offenbar, daß, wenn irgend eine beliebige Verbindung von sechs Buchstaben, z. B. $abcdef$, gewählt wird, man dann jeden der drei übrigen Buchstaben, g, h und i nach einander hinzusetzen könne, welches also drei Verbindungen zu 7 Buchstaben geben wird, nämlich

$$abcdefg,\quad abcdefh,\quad abcdefi.$$

Was so eben von einer besondern Verbindung zu sechs Buchstaben gesagt worden, ist von jeder derselben wahr, und es läßt sich hieraus abnehmen, daß jede Verbindung von

sechs Buchstaben deren drei zu sieben geben wird, d. h. so viele als Buchstaben vorhanden sind, die man noch nicht hinein gebracht hat. Ist also die Anzahl der Verbindungen zu sechs Buchstaben durch P vorgestellt, so würde man die der Verbindungen zu sieben Buchstaben erhalten, wenn man P mit 3 oder $9 - 6$ multiplicirt. Setzen wir nun statt der Zahlen 9 und 7, m und n, und stellen uns unter P die Anzahl der Verbindungen von m Größen zu $n - 1$ vor, so werden die Schlüsse noch immer dieselben bleiben, und wir werden für die Anzahl der Verbindungen zu n Buchstaben

$$P[m - (n - 1)] \quad \text{oder} \quad P(m - n + 1).$$

erhalten.

Diese Formel begreift unausschließlich alle besondern Fälle in sich. Um z. B. daraus die Anzahl der Verbindungen von m Buchstaben zu zweien und zweien abzuleiten, würden wir $n = 2$ setzen, welches

$$n - 1 = 1$$

giebt, und man würde

$$P = m$$

haben; denn P ist alsdann der Anzahl der Buchstaben, jedesmal zu einem genommen, gleich. Man wird also hieraus

$$m(m - 2 + 1) \quad \text{oder} \quad m(m - 1)$$

erhalten. Setzen wir ferner

$$P = m(m - 1) \quad \text{und} \quad n = 3,$$

so wird sich für die Anzahl der Verbindungen, deren m Buchstaben zu dreien und dreien fähig sind,

$$m(m - 1)(m - 3 + 1) = m(m - 1)(m - 2)$$

finden. Wird

$$P = m(m - 1)(m - 2) \quad \text{und} \quad n = 4$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$$

für die Anzahl der Verbindungen zu 4 und 4.

Man kann auf diese Art nach und nach die Ausdrücke

für die Anzahl der Verbindungen aus jeglicher beliebigen Anzahl von Buchstaben bestimmen *).

§. 139.

Um nun aus der Anzahl von Verbindungen von n Buchstaben ihre verschiedenen Producte zu erhalten, bemerke man, daß, wenn bei irgend einer dieser Verbindungen ein Buchstabe immer die erste Stelle behält, die übrigen sich so oft unter einander versetzen lassen, als ein aus $n-1$ Buchstaben bestehendes Product verschiedene Versetzungen erleiden kann. So kann man z. B. das aus 7 Buchstaben bestehende Product $abcdefg$, wenn man a in der ersten Stelle läßt, auf so viele verschiedene Arten schreiben, als das aus sechs Buchstaben bestehende Product, $bcdefg$, Versetzungen zuläßt. Da nun jeder dieser Buchstaben die erste Stelle einnehmen kann, so wird man, wenn Q die Anzahl der Versetzungen bezeichnet, deren ein Product von 6 Buchstaben fähig ist, für die Anzahl der Versetzungen eines aus 7 Buchstaben bestehenden Products $Q \times 7$ erhalten. Hieraus folgt, daß wenn

*) Bei diesen Verbindungen sind die Wiederholungen der Buchstaben außer Acht gelassen, weil die Untersuchung, welche uns hier beschäftigt, keine dergleichen zuläßt. Aber die Theorie der Combinationen und Permutationen, welche die Basis der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, legt zuweilen Aufgaben vor, wo diese Umstände Statt haben. Um nun die Anzahl derselben beim obigen Beispiele zu berechnen, erwäge man nur, daß man ohne Ausnahme jeden der 9 Buchstaben, a, b, c, d, e, f, g, h, i, zu Ende einer jeden Verbindung von 6 Buchstaben, a, b, c, d, e, f, hinzusetzen kann. Bezeichnen wir nun die Anzahl der Verbindungen dieser Art durch P, so wird man für die Anzahl derjenigen zu 7 Buchstaben $P \times 9$ erhalten. Aus eben der Ursache wird, wenn P die Anzahl der Verbindungen von m Buchstaben zu $n-1$ und $n-1$ bezeichnet, $P \times m$ die der Verbindungen zu n und n ausdrücken.

Dieses vorausgesetzt, wird, da die Anzahl der Verbindungen von m Buchstaben, zu 1 und 1 genommen, offenbar m ist, die der Verbindungen zu 2 und 2, $m \times m$ oder m^2 sein; die der Verbindungen zu 3 und 3 wird $m \times m \times m$ oder m^3 sein; und endlich wird m^n die Anzahl der Verbindungen zu n und n ausdrücken.

Q die Anzahl der Versetzungen eines aus $n-1$ Buchstaben bestehenden Products ist, Qn die der Versetzungen eines aus n Buchstaben bestehenden sein wird.

Aus dieser Formel lassen sich alle besondern Fälle ohne Mühe herleiten; denn setzen wir $n=2$, so wird, da es offenbar ist, daß für einen einzelnen Buchstaben $Q=1$ ist, die Anzahl der Versetzungen eines Products aus zwei Buchstaben $1\times 2=2$ sein. Nehmen wir nun $Q=1\times 2$ und $n=3$, so werden wir für die Anzahl der Versetzungen eines aus drei Buchstaben bestehenden Products $1\times 2\times 3=6$ erhalten. Setzen wir wieder $Q=1\times 2\times 3$ und $n=4$, so werden hieraus $1\times 2\times 3\times 4=24$ verschiedene Versetzungen entspringen, die bei einem aus vier Buchstaben bestehenden Product möglich sind, u. s. f.

§. 140.

Aus dem gut begriffenen Vorhergehenden ist leicht zu ersehen, daß die Anzahl der möglichen Verbindungen von m Buchstaben zu n und n durch die Versetzungen, deren n Buchstaben fähig sind, dividirt, die Anzahl der verschiedenen Producte, welche entstehen können, wenn man von m Buchstaben auf alle mögliche Arten n Factoren nimmt, zum Quotienten giebt. Es wird sich also diese durch $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ *) ausdrücken

*) Die Formel $\frac{P(m-n+1}{Qn}$, welche in diesem §. für die Anzahl der Combinationen oder der verschiedenen Producte, welche erhalten werden, wenn man auf alle mögliche Arten von m Buchstaben n derselben zu Factoren nimmt, gefunden worden, giebt nach einander

$$\frac{m(m-1)}{1\,.\,2},\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

je nachdem $n=2$, $n=3$, $n=4$ u. s. w. gesetzt wird. Diese Resultate sind wohl zu merken, weil sie angeben, wie viel Combinationen oder verschiedene Producte aus m Größen zu 2 und 2, 3 und 3, 4 und 4 u. s. w. gebildet werden können.

lassen; und nach dem, was in §. 137. bemerkt worden, muß $\frac{P(m-n+1)}{Qn} a^n x^{m-n}$ dasjenige Glied angeben, welches in der Entwickelung von $(x+a)^m$ die Potenz x^{m-n} enthält.

Es ist einleuchtend, daß das diesem Gliede nächst vorhergehende Glied durch $\frac{P}{Q} a^{n-1} x^{m-n+1}$ ausgedrückt sein wird; denn wenn man zu dem ersten Gliede zurück geht, so nimmt der Exponent der Potenz von x um eine Einheit zu, und der von a um eben so viel ab; ferner sind P und Q die zur Zahl $n-1$ gehörigen Größen.

§. 141.

Wenn wir $\frac{P}{Q} = M$ setzen, so werden sich die oben angezeigten zwei nächst auf einander folgenden Glieder durch

$$M a^{n-1} x^{m-n+1} \text{ und } M \frac{m-n+1}{n} a^n x^{m-n}$$

vorstellen lassen; ein Resultat, welches angiebt, wie bei der Entwickelung von $(x+a)^m$ jedes Glied aus dem nächst vorhergehenden gebildet werden kann.

Gehen wir vom ersten Gliede x^m aus, so erhalten wir, wenn wir $n=1$ setzen, das zweite, welches x^{m-1} wird; und da, weil der Coefficient des ersten Gliedes die Einheit ist, $M=1$ wird, so ergiebt sich für das zweite Glied $\frac{1 \times m}{1} a x^{m-1}$ oder $\frac{m}{1} a x^{m-1}$. Um zum dritten Gliede zu gelangen, setze man $M = \frac{m}{1}$ und $n=2$, welches $\frac{m(m-1}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$. Das vierte Glied wird gefunden, wenn man $M = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ und $n=3$ setzt, welches auf $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$ führt, und so fort. Dieses erzeugt folgende Formel:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{u. s. w.,}$$

welche man in folgende Regel fassen kann.

Um aus einem Gliede das nächstfolgende zu erhalten, multiplicire man den Zahlencoefficienten desselben mit dem Exponenten von x im ersten dieser beiden Glieder; dividire dieses durch die Zahl, welche die Stelle dieses Gliedes angiebt; vermehre den Exponenten von a um die Einheit und vermindere den von x um eben so viel.

Obgleich die Anzahl der Glieder dieser Formel nicht eher bestimmt werden kann, so lange man nicht für m einen besondern Werth setzt, so bleibt doch kein Zweifel über das Gesetz übrig, welches die Glieder dieser Formel beobachten, so entfernt man sie auch vom ersten Gliede annehmen mag; denn man sieht leicht, daß

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} a^n x^{m-n}$$

dasjenige Glied ausdrückt, welches n Glieder vor sich hat.

Diese letztere Formel wird das allgemeine Glied der Reihe

$$x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \text{u. s. w.}$$

genannt, weil sie, wenn darin nach einander $n=1$, $n=2$, $n=3$ u. s. w. gesetzt wird, alle Glieder dieser Reihe giebt.

§. 142.

Wenden wir die Regel des vorhergehenden §. auf die Entwickelung von $(x+a)^5$ an, so wird, da das erste Glied

x^5 oder $a^0 x^5$ (§. 37.)

ist, das zweite sein

$\frac{5}{1} a^1 x^4$ oder $5 a x^4$,

das dritte $\frac{5 \times 4}{2} a^2 x^3$ oder $10 a^2 x^3$,

das vierte $\frac{10 \times 3}{3} a^3 a^2$ oder $10 a^3 x^2$,

das fünfte $\frac{10 \times 2}{4} a^4 x$ oder $5 a^4 x$,

das sechste $\frac{5 \times 1}{5} a^5 x^0$ oder a^5.

Hier hört die Entwickelung auf, weil man, um das folgende Glied zu erhalten, mit dem Exppnenten von x im sechsten Gliede multipliciren müßte, welcher Null ist.

Dasselbe zeigt auch die Formel; denn der Zahlencoefficient des siebenten Gliedes, welcher

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)\,(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

ist, enthält im gegenwärtigen Falle den Factor $m-5$, welcher zu $5-5$ oder o wird; und da dieser Factor in allen übrigen Gliedern bleibt, so wird alles Folgende Null sein.

Wenn man die oben erhaltenen Glieder zusammen nimmt, findet sich

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

§. 143.

Aus der Formel in §. 141. läßt sich überhaupt die Entwickelung einer jeden Potenz irgend eines Binomiums herleiten. Wenn man z. B. die sechste Potenz von $2x^3 - 5a^3$ entwickeln wollte, so braucht man nur in die Potenzformel, statt der Potenzen von x und a, die jedesmal dahin gehörigen von $2x^3$ und $-5a^3$ zu seßen, weil man, wenn

$$2x^3 = x' \quad \text{und} \quad -5a^3 = a'$$

geseßt wird, folgenden Ausdruck erhält

(2 x^3

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (x' + a')^6 =$$
$$x'^6 + 6a'x'^5 + 15a'^2x'^4 + 20a'^3x'^3$$
$$+ 15a'^4x'^2 + 6a'^5x' + a'^6 \text{ (§. 141.)},$$

und man hat nur noch nöthig, für x' und a' die durch sie ausgedrückten Größen zu substituiren. Man wird alsdann erhalten

$$(2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 + 15(-5a^3)^2(2x^3)^4$$
$$+ 20(-5a^3)^3(2x^3)^3 + 15(-5a^3)^4(2x^3)^2$$
$$+ 6(-5a^3)^5(2x^3) + (-5a^3)^6$$

oder

$$64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12}$$
$$- 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6$$
$$- 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18}.$$

Man sieht hieraus, daß die Glieder wechselseitig positiv und negativ sind, und es ist offenbar, daß dieses immer der Fall sein muß, wenn das zweite Glied des vorgelegten Binomiums das Zeichen — hat.

§. 144.

Die Formel in §. 141. läßt sich auf einen einfachern Ausdruck bringen, welcher die Anwendung derselben auf alle den vorigen ähnliche Fälle sehr erleichtert.

Erwägt man nämlich, daß

$$x^{m-1} = \frac{x^m}{x},\quad x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2},\quad x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3} \text{ u. s. w.},$$

so wird sich obige Formel auch folgendermaßen schreiben lassen:

$$x^m + \frac{m}{1}\frac{a}{x}x^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2}x^m + \text{u. s. w.},$$

welches sich auf

$$x^m\left\{1 + \frac{m}{1}\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2}\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{a^3}{x^3} + \text{u. s. w.}\right\}$$

bringen läßt, indem man den gemeinschaftlichen Factor x^m herauszieht. Um nach dieser Formel zu rechnen, muß man sich zuvörderst die Reihe der Zahlen

$$\frac{m}{1}, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \text{ u. s. w.}$$

aufsetzen, und das erste Glied durch den Bruch $\frac{a}{x}$ multipliciren; hierauf dieses Resultat durch das zweite und ferner durch $\frac{a}{x}$, dann dieses zweite Resultat durch das dritte und überdies durch $\frac{a}{x}$ und so fort. Diese Resultate, zusammen genommen und zur Einheit gesetzt, müssen dann noch durch x^m multiplicirt werden.

Im Beispiele $(2x^3 - 5a^3)^6$ muß man $(2x^3)^6$ statt x^m, und statt des Bruchs $\frac{a}{x}$, $-\frac{5a^3}{2x^3}$ schreiben. Wir wollen die Ausführung der Rechnung dem Leser überlassen *).

§. 145.

Leicht führt man die Entwickelung der Potenz eines beliebigen Polynoms auf die Potenzen eines Binoms zurück, wie ich es bei der Bildung der dritten Potenz des Trinoms $a+b+c$ zeigen will.

Zuerst mache ich $b+c=m$, und erhalte

$$(a+b+c)^3 = (a+m)^3 = a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3,$$

so habe ich nun für m das Binom $b+c$, welche sie vorstellt, und ich habe

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3.$$

Es bleiben nur noch die Potenzen des Binoms $b+c$ zu

---

*) Die Formel für die Entwickelung von $(x+a)^m$ ist für alle Werthe des Exponenten m richtig und läßt sich auch in den Fällen anwenden, wo der Exponent m ein Bruch oder eine negative Größe ist. Diese Eigenschaft, welche sehr wichtig ist, soll im Complement (Theil II.) dieser Anfangsgründe bewiesen werden.

entwickeln und die angezeigten Multiplicationen mit diesen Potenzen auszuführen, welches geben wird

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$+ 3a^2c + 6abc + 3b^2c$$
$$+ 3ac^2 + 3bc^2$$
$$+ c^3.$$

Von der Ausziehung der Wurzeln aus complexen Größen.

§. 146.

Nachdem ich die Zusammensetzung der Potenzen von den complexen Größen vorgetragen habe, will ich zur Ausziehung ihrer Wurzeln übergehen, indem ich mit der Kubikwurzel aus Zahlen den Anfang mache.

Um die Kubikwurzel aus einer Zahl ziehen zu können, muß man zuerst die Kubi der einziffrigen Zahlen kennen; man findet sie in der zweiten Zeile folgender Tafel:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729;

und da nun der Kubus von 10 schon 1000 ist, so folgt, daß jede dreiziffrige Zahl nur den Kubus einer einziffrigen Zahl enthalten kann.

Die Bildung des Kubus einer zweiziffrigen Größe verrichtet man auf eine ganz analoge Art mit der des Quadrats; denn wenn man diese Zahl in Zehner und Einheiten zerfällt, so wird man, wenn die ersten durch a und die letzten durch b bezeichnet werden, folgenden Ausdruck erhalten:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

welcher zeigt, daß die dritte Potenz oder der Kubus einer aus Zehnern und Einheiten zusammengesetzten Zahl aus vier Theilen zusammengesetzt sei, nämlich: aus dem Kubus der Zehner, dem dreifachen Producte

aus dem Quadrat der Zehner in die Einer, aus dem dreifachen Producte der Zehner ins Quadrat der Einer und endlich aus dem Kubus der Einer.

Es sei nun 47 die Zahl, von welcher die dritte Potenz verlangt wird, so wird man, wenn $a = 4$ Zehnern oder 40 und $b = 7$ Einheiten gesetzt wird, für diese finden:

$$a^3 = 64000$$
$$3a^2b = 33600$$
$$3ab^2 = 5880$$
$$b^3 = 343$$

Das Ganze... $103823 = 47 \times 47 \times 47$.

Um jetzt vom Kubus 103823 auf dessen Wurzel 47 zurückzukommen, bemerke man zuerst, daß 64000, der Kubus der Zehner 4, keine geltende Ziffern von einer niedern Ordnung als Tausende hat; man kann daher, bei Aufsuchung des Kubus der Zehner, die Hunderte, Zehner und Einheiten der Zahl 103823 ganz außer Acht lassen.

Diesemnach würde man, um auf eine ähnliche Art, wie bei der Ausziehung der Quadratwurzel, zu verfahren, die drei ersten Ziffern zur rechten Seite durch ein Komma absondern, und der größte in 103 enthaltene Kubus würde der der Zehner sein. Da nun, wie aus der vorhergehenden Tabelle zu ersehen, dieser Kubus 64 und dessen Wurzel 4 ist, so setze man diese 4 in die für die Wurzel bestimmte Stelle. Ich ziehe dann 64 von 103 ab und setze zur Seite des Rests 39 die drei letzten Ziffern herunter. Dieser ganze Rest 39823 muß noch die drei übrigen Theile des Kubus enthalten, nämlich das dreifache Product aus dem Quadrat der Zehner in die Einheiten oder $3a^2b$, das dreifache Product aus den Zehnern in das Quadrat der Einer oder $3ab^2$ und den Kubus der Einheiten oder b^3. Wenn man den Werth des Products $3a^2b$ hätte, so würde man,

103,823	47
64	48
398,23	

da die Zehner a schon bekannt sind, dieses Product durch $3a^2$ dividiren, um die Einheiten b zu erhalten; aber obgleich man $3a^2b$ nicht kennt, so weiß man doch so viel, daß das Product keine bedeutende Ziffer einer niederern Ordnung als der Hunderte enthalten kann, weil es den Factor a^2 enthält, welcher das Quadrat der Zehner ist; es wird also nur in dem Theil 398, welches von der Zahl 39823 zum Rest bleibt, nachdem man die Zehner und Einheiten abgeschnitten hat, anzutreffen sein, welcher Theil auch noch die aus dem Producte $3ab^2$, aus den Zehnern ins Quadrat der Einer, und die aus dem Kubus der Einer b^3 entspringenden Hunderte enthalten kann.

Wenn man daher 398 durch 48, welches in diesem Beispiele das dreifache Quadrat der Zehner, $3a^2$ oder 3×16 ist, dividirt, so wird man zum Quotienten 8 finden; aber aus dem Vorhergehenden folgt, daß man diese Zahl nicht eher für die Einheiten der gesuchten Wurzel annehmen kann, bis man ihn probirt hat, und dieses geschieht, indem man die drei letzten Glieder des Kubus bildet, welche der Rest 39823 enthalten muß. Setzt man nun $b=8$, so findet man

$$\begin{aligned} 3a^2b &= 38400 \\ 3ab^2 &= 7680 \\ b^3 &= 512 \\ \hline \text{das Ganze} \ldots\ldots & 46592; \end{aligned}$$

und da nun dieses Resultat den Rest 39823 übertrifft, so muß man die für die Einheiten angenommene Zahl 8 vermindern. Wenn man auf eben diese Art mit 7 probirt, so findet sich, daß diese den Bedingungen ein Genüge thut, und daß folglich 47 die verlangte Wurzel ist.

Anstatt die gefundene Wurzel auf die eben gebrauchte Art zu probiren, erhebt man gewöhnlich die Zahl, welche die beiden gefundenen Ziffern ausdrücken, unmittelbar zum Kubus, indem man sie durch das Quadrat derselben multiplicirt. Verfährt man eben so mit 48, so wird man finden

$$48 \times 48 \times 48 = 110592,$$

und da diese Zahl größer als die vorgelegte 103823 ist, so zeigt sich, daß die Ziffer 8 noch zu groß ist.

§. 147.

Das beim vorhergehenden Beispiel gebrauchte Verfahren muß sich ebenfalls bei allen aus mehr als drei und aus weniger als 7 Ziffern bestehenden Zahlen anbringen lassen. Nachdem man nämlich die drei ersten Ziffern zur rechten Seite abgesondert hat, würde man den in dem zur linken Seite übrig bleibenden Theil enthaltenen größten Kubus suchen; man würde hierauf dessen Wurzel in die dafür bestimmte Stelle setzen und gedachten Kubus von der vorgelegten Zahl abziehen; zur Seite dieses Rests würde man die drei letzten Ziffern heruntersetzen, die Zehner und Einer davon absondern und den zur linken Seite übrig bleibenden Theil durch das Dreifache des Quadrats der gefundenen Zehner dividiren; ehe man aber diesen Quotienten zur Wurzel schreibt, würde man ihn prüfen, indem man diesen Quotienten zu den bekannten Zehnern hinzugesetzt, welches dann die vollständige Wurzel darstellt und diese zum Kubus erhebt. Wenn das Resultat dieser Operation zu groß ausfallen möchte, würde man die Ziffern der Einheiten vermindern und mit diesen neuen Einheiten eben so wie mit den ersten die Probe anstellen, und dieses so fort, bis man ein Resultat findet, welches der vorgelegten Zahl entweder gleich oder kleiner ist, in welchem letzteren Fall die vorgelegte Zahl kein vollständiger Kubus ist. In diesem Falle ist die gefundene Wurzel nur die des in der vorgelegten Zahl enthaltenen größten Kubus. Da nun zuweilen beträchtliche Reste bleiben, wollen wir zeigen, woran zu erkennen sei, ob man die Ziffern der Einheiten der Wurzel nicht zu klein genommen habe.

Der Kubus von $a+b$, indem man $b=1$ setzt, wird in den von $a+1$ verwandelt und daher in diesem Fall durch

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

ausgedrückt, eine Größe, welche a^3, den Kubus von a, übertrifft um

$$3a^2 + 3a + 1.$$

Hieraus folgt, daß, so lange der Rest bei einer Ausziehung der Kubikwurzel kleiner ist als das dreifache Quadrat der Wurzel nebst dem Dreifachen der Wurzel mehr die Einheit, die gesuchte Wurzel nicht zu klein genommen sei.

§. 148.

Um aus 10582381 7 die Kubikwurzel zu ziehen, bemerke man zuvörderst, daß man diese, aus wie vielen Ziffern sie auch zusammengesetzt sein mag, immer als aus Einern und Zehnern bestehend betrachten kann; und da der Kubus der Zehner keinen Theil der drei letzten Ziffern zur rechten Seite ausmacht, so müßte er blos in dem bleibenden Theile 10582 3 zu finden sein. Weil aber der in 10582 3 enthaltene größte Kubus mehr als eine Ziffer zur Wurzel haben muß, so kann man sich diese wiederum in Einer und Zehner zerlegt vorstellen, und da der Kubus dieser Zehner sich nicht über die Tausende hin erstrecken kann, so kann es auch nicht in den drei letzten Ziffern 8 2 3 gesucht werden. Wenn, nachdem man diese abgesondert hat, mehr als drei Ziffern zur linken Seite übrig bleiben sollten, so müßte man die vorhergehenden Schlüsse wiederholen, und man würde auf diese Art die Stelle finden, worin der Kubus der Einheiten von der höchsten Ordnung der Wurzel anzutreffen ist, indem man die vorgelegte Zahl von der rechten zur linken Seite in Klassen von drei Ziffern zerlegt, deren letzte auch wohl weniger als drei Ziffern enthalten kann.

Dieses vorausgesetzt, würde man, nachdem die Operation auf die gewöhnliche Art angeordnet worden, zuvörderst aus den beiden Klassen zur linken Seite, nach der Regel des

vorigen §. die Kubikwurzel ziehen und 47 zum Resultat erhalten; man würde dann den Kubus dieser Zahl von den beiden Klassen, welche ihn enthalten,

105,823,817	473
64	48
41 8,23	6627
103 823	

abziehen, und neben den Rest 2000 die folgende Klasse 817 herunterseßen, und diese Zahl 2000817 muß die drei letzten Theile des Kubus der Zahl enthalten, von welcher 47 die Zehner angiebt und deren Einer gesucht werden; man wird also die Einer so wie im Beispiele des vorigen §. finden, indem man die beiden letzten Ziffern zur rechten Seite des Rests absondert und den zur linken Seite bleibenden Theil durch 6627 als das Dreifache des Quadrats von 47 dividirt. Man würde dann den Quotienten 3 probiren, indem man

2 0008,17

1 05 823 817

000 000 000

473 zum Kubus erhebt, und zum Resultat die vorgelegte Zahl erhalten, weil diese Zahl ein vollkommener Kubus ist.

Die Erklärung des vorhergehenden Beispiels kann als eine allgemeine Regel betrachtet werden. Wenn die vorgelegte Zahl eine Klasse mehr haben sollte, so müßte man die Operation wie bei der dritten fortseßen und nur bemerken, daß man zur Wurzel eine Null seßen muß, wenn der zur linken Seite zu dividirende Theil des Restes die Zahl, durch welche man dividirt, nicht enthalten sollte; man müßte dann zur folgenden Klasse übergehen, und, nachdem sie zum Rest hinzugeseßt worden ist, so wie mit den vorhergehenden verfahren.

§. 149.

Da der Kubus eines Bruchs erhalten wird, indem man diesen Bruch durch sein Quadrat multiplicirt, oder, welches dasselbe ist, indem man den Zähler und Nenner besonders kubirt, so folgt, daß man umgekehrt auf die Wurzel zurück kommt, wenn diese sowohl aus dem neuen Zähler als aus dem neuen Nenner gezogen

wird. Da z. B. der Kubus von $\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$ ist, so findet man, wenn sowohl aus 125 als aus 216 die Kubikwurzel gezogen wird, $\frac{5}{6}$.

Dieses Verfahren ist zu beobachten, wenn der Zähler und Nenner vollkommene Kubi sind; wenn dieses aber nicht der Fall ist, so kann man der Ausziehung der Wurzel aus dem Nenner überhoben sein, wenn man beide Glieder des Bruchs durch das Quadrat dieses Nenners multiplicirt; denn da der aus dieser Operation entspringende Nenner der Kubus des ersten Nenners ist, so braucht man nur noch die Wurzel aus dem Zähler zu ziehen. Wenn man z. B. $\frac{3}{5}$ hätte, so würde man durch die Multiplication beider Glieder dieses Bruchs durch 25, als durch das Quadrat des Nenners,

$$\frac{75}{5 \times 5 \times 5},$$

erhalten; die Wurzel aus dem Nenner dieses Bruchs ist 5, und die von 75 fällt zwischen 4 und 5. Wenn man sich mit 4 begnügt, so wird man für die Kubikwurzel aus $\frac{3}{5}$ bis auf ein Fünftel beinah, $\frac{4}{5}$ erhalten. Um aber einen höhern Grad von Genauigkeit zu erhalten, muß man die Kubikwurzel aus 75 näherungsweise suchen, wozu wir die Mittel weiter unten angeben werden.

Wenn der Nenner schon ein vollkommenes Quadrat ist, so ist es hinreichend, beide Glieder des Bruchs durch die Quadratwurzel aus diesem Nenner zu multipliciren. Um also die Kubikwurzel aus $\frac{4}{9}$ zu finden, multiplicire ich beide Glieder durch 3, als durch die Quadratwurzel aus 9, und erhalte

$$\frac{12}{3 \times 3 \times 3};$$

und wenn man die Wurzel des in 12 enthaltenen größten

Kubus 8 nimmt, so findet man für die gesuchte Wurzel $\frac{k}{s}$, welche bis auf ein Drittheil richtig ist.

§. 150.

Es folgt aus dem in §. 97. bewiesenen Satze, daß die Kubikwurzel aus einer Zahl, welche kein vollkommener Kubus ist, sich auch nicht durch einen Bruch genau ausdrücken lassen wird, so groß man auch den Nenner desselben annehmen mag, und sie wird daher eine Irrationalgröße sein, aber von einer ganz andern Art als die der Quadratwurzel; denn in den meisten Fällen ist es unmöglich, die eine durch die andere auszudrücken.

§. 151.

Man könnte sich, um die Kubikwurzel durch gewöhnliche Brüche näherungsweise zu finden, eines ähnlichen Verfahrens bedienen, als wir §. 103. für die Ausziehung der Quadratwurzel gelehrt haben, und da dies sehr leicht abzunehmen ist, so wollen wir uns nicht dabei aufhalten, besonders da es eben nicht das bequemste ist.

Die beste Methode, die gewöhnlichen Brüche bei dieser Untersuchung anzuwenden, ist diese, die Wurzel aus Brüchen von einer gegebenen Gattung zu ziehen. Um z. B. aus 22 die Kubikwurzel bis auf $\frac{1}{5}$ der Einheit richtig zu erhalten, bemerke man nur, daß der Kubus von $\frac{1}{5} = \frac{1}{125}$ ist, und man würde folglich 22 in $\frac{2750}{125}$ verwandeln; nimmt man die Kubikwurzel aus 2750 in ganzen Zahlen, so wird dieselbe aus $22 = \frac{14}{5}$ oder $2\frac{4}{5}$ sein.

§. 152.

Das gebräuchlichste Mittel, um aus einer Zahl die Kubikwurzel durch Näherung zu erhalten, besteht darin, diese Zahl in einen Decimalbruch zu verwandeln, wobei aber zu merken ist, daß dieses nur in Tausendtheilen oder Million-

theilen u. s. w. geschehen kann, weil die Zehntheile Tausendtheile werden, wenn man sie zur dritten Potenz erhebt; desgleichen verwandeln sich die Hunderttheile in Milliontheile, und überhaupt ist die Anzahl der Decimalziffern im Kubus das Dreifache derjenigen, welche die Wurzel enthält. Es läßt sich hieraus abnehmen, daß man am Ende der vorgelegten Zahl dreimal so viel Nullen anhängen muß, als man für die Wurzel Decimalziffern verlangt. Man würde dann nach den im Vorhergehenden auseinandergesetzten Regeln die Wurzel ausziehen und von dem Resultat die verlangte Anzahl Decimalziffern abschneiden.

Wenn man z. B. die Kubikwurzel aus 327 bis auf ein Hunderttheil genau finden wollte, so müßte man sechs Nullen an diese Zahl hängen und nach der vorhergehenden Regel aus 327000000 die Kubikwurzel ziehen. Die Operation läßt sich folgenderwaßen anordnen:

327,000,000	688
216	108
1110,00	13872
31443 2	
125680,00	
325660672	
1339328	

Man muß vom gefundenen Resultat zwei Decimalziffern zur rechten Seite abschneiden, und man wird also 6,88 erhalten; es wäre indessen richtiger, 6,89 dafür anzunehmen, weil der Kubus dieser letzten Zahl, ob er gleich größer als 327 ist, doch derselben näher liegt als der von 6,88.

Wenn die vorgelegte Zahl schon Decimalziffern haben sollte, so müßte man vor der Ausziehung so viele Nullen zur Rechten anhängen als erforderlich sind, damit die Anzahl der Decimalziffern ein Vielfaches von 3 werde. Wenn z. B. 0,07 diese Zahl wäre, so würde man schreiben 0,070; und wenn man aus 70 Tausendtheilen die Kubikwurzel

zieht, so wird diese 0,4 fein. Um aber die Genauigkeit bis auf ein Hunderttheil zu treiben, ist es erforderlich, noch drei Nullen daran zu setzen, welches geben würde 0,070000. Da nun die Wurzel aus 70000, in ganzen Zahlen genommen, 41 ist, so wird die aus 0,07, bis auf ein Hunderttheil, genau = 0,41 sein.

§. 153.

Nachdem wir die Verfahrungsarten, um die Quadrat- und Kubikwurzeln aus den Zahlen zu finden, kennen gelernt haben, führt uns die Binomialformel auf ein ähnliches Verfahren, um die Wurzel irgend eines Grades zu erhalten; bevor wir aber dieses Verfahren aus einander setzen, wollen wir noch einige Bemerkungen über die Ausziehung derjenigen Wurzeln hinzufügen, deren Exponent durch irgend eine Zahl theilbar ist.

Die Ausziehung der Wurzel vom vierten Grade kann durch zwei nach einander verrichtete Ausziehungen der Quadratwurzel bewerkstelligt werden: denn wenn man aus einer vierten Potenz, z. B. aus a^4 die Quadratwurzel zieht, so kommt man auf das Quadrat oder a^2, ein Resultat, dessen Quadratwurzel a oder die gesuchte Größe ist.

Desgleichen sieht man, daß durch drei auf einander folgende Ausziehungen der Quadratwurzel die Ausziehung der Wurzel vom achten Grade bewerkstelligt wird, weil die Quadratwurzel aus $a^8 = a^4$ ist, ferner die von $a^4 = a^2$, und endlich die aus $a^2 = a$ ist.

Es ist hieraus offenbar, daß jede Wurzel eines durch eine von diesen Zahlen 2, 4, 8, 16, 32 u. s. w., das ist, eines durch eine Potenz von 2 angezeigten Grades durch mehrere auf einander folgende Ausziehungen der Quadratwurzel erhalten werden kann.

Die Wurzeln, deren Exponenten keine Primzahlen sind, können immer auf andere von einem niedern Grade zurück

gebracht werden; so kann z. B. die Wurzel vom sechsten Grade durch eine Ausziehung der Quadratwurzel und eine Ausziehung der Kubikwurzel bewerkstelligt werden. Um sich hiervon zu überzeugen, erwäge man nur, daß man, wenn auf diese Art mit a^6 verfahren wird, zuerst a^3 und hierauf a erhält; man könnte auch zuerst die Kubikwurzel nehmen, welches a^2 geben würde, und hieraus die Quadratwurzel ausziehen, wodurch man ebenfalls a erhalten würde.

§. 154.

Ich will nun zur allgemeinen Methode übergehen, die ich auf den fünften Grad anwenden werde. Der Gang derselben wird an einem besondern Fall am besten gezeigt werden können, und wenn man ihn mit den bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel gezeigten Verfahrungsarten vergleicht, wird man leicht abnehmen können, wie man bei irgend einem andern Grade verfahren muß.

Es sei also aus 231554007 die Wurzel vom fünften Grade zu ziehen. Hier bemerke ich zuvörderst, daß die kleinste durch zwei Ziffern ausgedrückte Zahl, das ist 10, schon 6 Ziffern in der fünften Potenz hat, welche 100000 ist, und es läßt sich hieraus schließen, daß die fünfte Wurzel der vorgelegten Zahl wenigstens zwei Ziffern hat; ich könnte also diese Wurzel durch $a+b$ vorstellen, wo a die Zehner und b die Einer derselben bezeichnet, und die vorgelegte Zahl würde zum Ausdruck haben

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \text{u. s. w.}$$

Ich entwickle die folgenden Glieder dieserhalb nicht, weil es hinreichend ist, die beiden ersten zu kennen, wie wir bald sehen werden.

Dieses vorausgesetzt, sieht man leicht ein, daß a^5 oder die fünfte Potenz der Zehner dieser Wurzel, indem sie keine niedere Ordnung als Hunderttausende enthalten kann, keinen Theil der fünf ersten Ziffern zur Rechten ausmacht; ich son-

dere daher diese fünf Ziffern ab. Wenn zur linken Seite mehr als fünf Ziffern bleiben sollten, so würde ich auf eben diese Art schließen, und dergestalt die vorgelegte Zahl, von der rechten zur linken Seite zu, in Klassen von fünf Ziffern abtheilen; die letzte Klasse zur Linken muß die fünfte Potenz der Einheiten von der höchsten Ordnung der Wurzel enthalten.

Wenn man die fünfte Potenz von den einfachen Ziffern bildet, so ergiebt sich, daß 2315 zwischen die fünfte von 4, welche 1024, und die von 5, welche 3125 ist, fällt.

2315,54007	47
1024	
1291 5,4007	1280

Ich nehme daher 4 für die Zehner der gesuchten Wurzel, und wenn ich die fünfte Potenz dieser Zahl oder 1024 von der ersten Klasse der vorgelegten Zahl abziehe, so bleibt 1291 zum Rest, zu welchem ich die folgende Klasse herunterseße. Die hieraus entspringende Zahl muß noch die Glieder $5a^4b + 10a^3b^2 +$ u. s. w. enthalten, welche übrig bleiben, nachdem man a^5 von $(a+b)^5$ abgezogen hat, und das höchste dieser Glieder ist $5a^4b$ oder fünfmal die vierte Potenz der Zehner, multiplicirt durch die Einer, weil es sich nicht bis unter die Zehntausende erstreckt. Um dieses besonders zu betrachten, sondere man die 4 letzten Ziffern zur rechten Seite ab, welche keinen Theil dieses Gliedes enthalten, und die zur linken Seite übrig bleibende Zahl 12915 muß dieses Glied und überdieß die aus den folgenden Gliedern entspringenden Zehntausende enthalten. Es ist leicht einzusehen, daß man durch die Division von 12915 durch $5a^4$ oder durch das Fünffache der vierten Potenz der 4 Zehner, die Einheiten aber nur näherungsweise erhalten kann. Da nun die vierte Potenz von $4 = 256$ und deren Fünffaches 1280 ist, so wird man, wenn 12915 durch 1280 dividirt wird, 10 zum Quotienten erhalten; man kann aber nicht mehr als 9 zur Wurzel seßen, und muß sogar, bevor man diese Einheiten der Wurzel nimmt, untersuchen, ob nicht

etwa 49, welche dann für die Wurzel erhalten wird, zur fünften Potenz erhoben, ein größeres Produkt giebt, als die vorgelegte Zahl ist. Man wird auf diese Art finden, daß man die Zahl 49 um zwei Einheiten vermindern muß, und daß die eigentliche Wurzel 47 ist mit einem Rest, welcher 2209000 gleicht, weil die fünfte Potenz von 47=229345007 ist, das heißt, die genaue Wurzel der vorgelegten Zahl liegt zwischen 47 und 48.

Wenn noch eine Klasse vorhanden wäre, so würde man diese zum Rest, welchen die Subtraction der größten in den beiden ersten Klassen enthaltenen fünften Potenz gelassen hat, hinzuschreiben und mit dem ganzen Rest, so wie mit dem vorhergehenden verfahren und so fort.

Nach dem, was eben gesagt ist, kann man leicht sowohl die für die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln aus Brüchen gegebenen Regeln als auch diejenigen, vermittelst deren man sich den Wurzeln der unvollkommenen Potenzen von diesen Graden nähern kann, auf den gegenwärtigen Fall ausdehnen.

§. 155.

Man gelangt zu der Ausziehung der Wurzeln aus Buchstabengrößen durch ein Verfahren, welches auf denselben Principien beruht. Das hier folgende Beispiel wird zureichen, zu zeigen, wie man in jedem beliebigen Grade verfahren muß.

Man hat in §. 143. die sechste Potenz von $2x^3 - 5a^3$ gefunden; aus dieser Potenz soll nun wieder die sechste Wurzel ausgezogen werden. Zu dieser Absicht ordne man die dortige Größe folgendergestalt:

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 & \\ \quad + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 & 2x^3 - 5a^3 \\ \quad + 15625a^{18} & \hline \\ -64x^{18} & 192x^{14} \\ \hline \text{Rest} \quad -960a^3x^{15} + \text{u. s. w.} & \end{array}$$

Wenn die vorgegebene Größe nach Potenzen von x geordnet ist, so muß ihr erstes Glied die sechste Potenz vom ersten Gliede der Wurzel sein, die eben so geordnet ist als die vorgegebene Größe. Nimmt man diesem gemäß die sechste Wurzel von $64x^{18}$ nach der Regel in §. 129, so hat man $2x^3$.

Erhebt man dieses Resultat zur sechsten Potenz und zieht sie von der vorgegebenen Größe ab, so wird der erhaltene Rest nothwendig mit dem zweiten Gliede der Entwickelung der sechsten Potenz von den beiden ersten Wurzelgliedern anfangen. Nun ist in dem Ausdruck

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5 b + \text{u. s. w.}$$

dieses Glied das Product aus dem Sechsfachen der fünften Potenz des ersten Wurzelgliedes mit dem zweiten; und wenn man es durch $6a^5$ dividirt, so würde der Quotient das zweite Glied b sein.

Man muß also sechsmal die fünfte Potenz vom ersten Wurzelgliede $2x^3$ machen, dieses giebt

$$6 \times 32x^{15} \quad \text{oder} \quad 192x^{15},$$

und hiermit dividirt man das Glied $-960a^3x^{15}$, womit der Rest der vorhergehenden Operation anfängt; der Quotient $-5a^3$ ist das zweite Wurzelglied. Um die Probe zu machen, erhebt man das Binom $2x^3 - 5a^3$ zur sechsten Potenz, und das Resultat würde die vorgegebene Größe bringen.

Sollte die Wurzel ein Glied mehr enthalten, so fände man nach der obigen Operation einen zweiten Rest durch das sechsfache Product der fünften Potenz der zwei ersten Wurzelglieder mit dem dritten, welches man folglich mit $6(2x^3 - 5a^3)^5$ dividiren muß; der Quotient wäre dieses dritte Wurzelglied, und man würde die Probe machen, indem man die sechste Potenz der drei gefundenen Glieder bildete. Eben so würde man verfahren, um alle folgenden Glieder zu finden, wie groß ihre Zahl auch immer sein mag.

Von

Von den zweigliedrigen Gleichungen.

§. 156.

Jede Gleichung, die nur eine einzige Potenz der unbekannten Größe, mit bekannten verbunden, enthält, läßt sich immer auf zwei Glieder reduciren, von welchen das eine die Vereinigung von allen Gliedern ist, welche die unbekannte enthalten, und die andere die Sammlung aller gegebenen Größen enthält; man hat dieses schon für den zweiten Grad (§. 105) gesehen, und es ist leicht, solches für jeden Grad zu begreifen.

Hätte man z. B. die Gleichung

$$a^2 x^5 - a^5 b^2 = b^4 c^3 + a c x^5$$

und schafft man alle mit x behafteten Glieder auf eine Seite, so leitet man daraus ab

$$a^2 x^5 - a c x^5 = b^4 c^3 + a^5 b^2$$

oder $$(a^2 - a c) x^5 = b^4 c^3 + a^5 b^2.$$

Stellt man jetzt die Größen

$a^2 - a c$ durch p, $b^4 c^3 + a^5 b^2$ durch q vor,

so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$p x^5 = q;$$

und wenn man die Größe x^5 befreiet, so hat man

$$x^5 = \frac{q}{p},$$

woraus man schließt

$$x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}.$$

Ueberhaupt giebt jede Gleichung von zwei Gliedern wenn sie auf die Form

$$p x^m = q$$

gebracht ist, alsdann

$$x^m = \frac{q}{p};$$

und zieht man aus jeder Seite die *m*te Wurzel, so hat man

$$x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}.$$

§. 157.

Es ist zu bemerken, daß wenn der Exponent *m* eine ungerade Zahl ist, so wird das Wurzelzeichen nur ein Zeichen und zwar dasjenige haben, welches die Größe hat, vor welcher es stehet (§. 131).

Wenn der Exponent *m* gerade ist, so wird das Wurzelzeichen das doppelte Zeichen ± haben; es wird alsdann imaginair sein, wenn die Größe $\frac{q}{p}$ negativ ist, und die Aufgabe wäre widersinnig wie für den zweiten Grad (§. 131.)

Hier einige Beispiele.

Die Gleichung $x^5 = -1024$ giebt

$$x = \sqrt[5]{-1024} = -4,$$

weil der Exponent 5 ungerade ist.

Die Gleichung $x^4 = 625$ giebt

$$x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5,$$

weil der Exponent 4 gerade ist.

Endlich, die Gleichung $x^4 = -16$, die

$$x = \pm\sqrt[4]{-16}$$

giebt, führt nur zu imaginairen Werthen, weil aus der negativen Zahl -16 die Wurzel einer geraden Potenz gezogen werden soll.

§. 158.

Bevor weiter gegangen wird, soll eine analytische Wahrheit gezeigt werden, welche uns sowohl in diesem Theile als auch in dem Complement sehr nützlich sein wird, und welche schon an und für sich merkwürdig genug ist. Es ist diese,

daß jeder dieser Ausdrücke $x - a$, $x^2 - a^2$, $x^3 - a^3$ und allgemein $x^m - a^m$ (wo m jede positive ganze Zahl sein kann), durch $x - a$ genau theilbar sind. Für den ersten ist die Sache für sich klar. Für den zweiten weiß man, daß

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \text{ (§. 54)};$$

und durch diese Division könnte man auch leicht die übrigen zerlegen. Wenn man auf diese Art $x^m - a^m$ durch $x - a$ dividirt, so wird man für den Quotient'n finden

$$x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \text{u. s. w.},$$

wo der Exponent von x in jedem folgenden Gliede um Eins abnimmt und der von a um eben so viel zunimmt. Anstatt aber das Einzelne dieses Verfahrens zu verfolgen, wollen wir sofort diese Gleichung hersetzen

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} \ldots + a^{m-2} x + a^{m-1},$$

deren Richtigkeit dargethan wird, wenn man die zweite Seite mit $x - a$ multiplicirt. Es kommt alsdann

$$x^m + a x^{m-1} + a^2 x^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2} x^2 + a^{m-1} x$$
$$- a x^{m-1} - a^2 x^{m-2} - a^3 x^{m-3} \ldots\ldots - a^{m-1} x - a^m;$$

da alle auf das erste Glied folgende Glieder in der ersten Zeile bis auf die Zeichen mit denjenigen völlig einerlei sind, welche dem letzten Gliede in der zweiten Zeile vorhergehen, so wird nach gemachter Reduction nur $x - a^m$, d. i. der vorgelegte Dividendus übrig bleiben.

Hier ist noch zu merken, daß in der obern Zeile, nach dem Gliede $a^2 x^{m-2}$, nothwendig $a^3 x^{m-3}$ folgen muß, welches von seinem correspondirenden in der untern Zeile vernichtet wird; desgleichen muß man sich in der untern Zeile vor dem Gliede $a^{m-1} x$, das Glied $- a^{m-2} x^2$ vorstellen, welches sich gegen sein correspondirendes in der obern Zeile aufhebt. Diese Glieder sind zwar nicht hergesetzt, indessen muß man sich dieselben, in dem punctirten Zwischenraum hingeschrieben, vorstellen.

§. 159.

Hieraus lassen sich in Betreff dieser zweigliedrigen Gleichung $x^m = \frac{q}{p}$ sehr wichtige Folgerungen ziehen.

Wenn man durch a die Zahl bezeichnet, welche nach den Regeln in §. 154. durch unmittelbare Wurzelausziehung erhalten wird, so muß

$$\frac{q}{p} = a^m \quad \text{oder} \quad x^m = a^m$$

sein, und versetzen wir den zweiten Theil in den ersten, so erhalten wir

$$x^m - a^m = 0.$$

Die Größe $x^m - a^m$ ist durch $x - a$ genau theilbar, und man erhält nach dem vorhergehenden §.

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + a x^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2} x + a^{m-1}).$$

Dieses letzte Resultat, welches verschwindet, wenn man $x = a$ setzt, wird ebenfalls Null werden, wenn man

$$x^{m-1} + a x^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2} x + a^{m-1} = 0 \quad (\text{§. 116})$$

hätte; und wenn daher irgend ein Werth von x vorhanden wäre, welcher, in der letzten Gleichung statt x gesetzt, derselben ein Genüge thut, so würde er auch die vorgelegte auflösen.

Diese Werthe stehen mit der Einheit in sehr einfachen Relationen, die wir entdecken können, wenn wir $x = ay$ setzen. Hierdurch verwandelt sich die Gleichung $x^m - a^m = 0$ in

$$a^m y^m - a^m = 0 \quad \text{oder} \quad y^m - 1 = 0,$$

und die Werthe von x werden erhalten, wenn man die von y mit der Zahl a multiplicirt.

Die Gleichung $y^m - 1 = 0$ giebt zuvörderst

$$y^m = 1, \qquad y = \sqrt[m]{1} = 1;$$

wenn wir nun $y^m - 1$ durch $y - 1$ dividiren, so kommt

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots\ldots + y^2 + y + 1;$$

und dieser Quotient, gleich Null gesetzt, giebt die Gleichung,

von welcher die übrigen Werthe von y abhängen, welche eben so wie die Einheit die Eigenschaft haben, der vorgelegten Gleichung

$$y^m - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad y^m = 1$$

ein Genüge zu thun, d. h. ihre *m*te Potenz wird ebenfalls die Einheit sein.

Hieraus ziehen wir die dem ersten Anschein nach sehr einfache Folgerung, daß die Einheit außer sich selbst noch mehrere **Wurzeln** haben kann.

Diese Wurzeln, welche imaginaire sind, haben gleichwohl einen mannigfaltigen Gebrauch in der Analysis; wir können indessen hier nur die der vier ersten Grade kennen lernen, weil wir nur für diese Grade die Gleichung vermittelst der bisher gegebenen Regeln aufzulösen im Stande sind

$$y^{m-1} + y^{m-2} \ldots\ldots + 1 = 0.$$

Es sei 1) $m = 2$, so hat man

$$y^2 - 1 = 0,$$

woraus folgt

$$y = +1, \quad y = -1.$$

2) Setzt man $m = 3$, so kommt

$$y^3 - 1 = 0,$$

woraus man erhält

$$y = 1,$$

und ferner $y^2 + y + 1 = 0.$

Diese letztere Gleichung aufgelöst, giebt

$$y = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

und man wird also für diesen Grad folgende drei Wurzeln haben:

$$y = 1, \quad y = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Die beiden letzten Ausdrücke sind imaginair; wenn man aber davon den Kubus macht, indem man (§. 34) den des Zählers bildet und bemerkt, daß das Quadrat von der $\sqrt{-3} = -3$ und ihr Kubus $= -3\sqrt{-3}$ ist, so findet man noch $y^3 = 1$, wie für die Wurzel $y = 1$.

3) Nehmen wir $m = 4$, so wird

$$y^4 - 1 = 0,$$

woraus sich

$$y = 1$$

ergiebt, und ferner erhält man

$$y^3 + y^2 + y + 1 = 0,$$

welches gleich

$$y^2(y + 1) + y + 1 = (y + 1)(y^2 + 1) = 0,$$

und woraus man zieht

$$y + 1 = 0, \quad y^2 + 1 = 0.$$

Diese Gleichungen geben

$$y = -1, \quad y = +\sqrt{-1}, \quad y = -\sqrt{-1};$$

die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichungen sind also

$$y = +1, \quad y = -1, \quad y = +\sqrt{-1}, \quad y = -\sqrt{-1}.$$

Von diesen vier Werthen sind bloß zwei reell und die beiden übrigen imaginair.

Diese findet man, wenn man bemerkt, daß

$$y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1),$$

woraus man nach und nach erhält

$$y^2 - 1 = 0, \quad y^2 + 1 = 0.$$

Diese Vielfachheit der Wurzeln der Einheit führt auf ein allgemeines Gesetz der Gleichungen, nach welcher jede unbekannte Größe so viel Werthe zuläßt, als im Exponenten des Grades der Gleichung, durch welche sie bestimmt wird, Einheiten anzutreffen sind; und wenn diese Aufgabe nicht so viel reelle Werthe zuläßt, so wird die Anzahl derselben durch reine algebraische Bezeichnungen ergänzt, welche, indem sie den in der Gleichung angezeigten Operationen unterworfen sind, ihr ein Genüge thun.

Hieraus folgt, daß die Wurzeln der Zahlen zwei Arten von Ausdrücken oder Werthen haben. Die erste, welche ich **arithmetische Bestimmung** nennen werde, ist die Zahl, die man durch das in §. 154 gezeigte Verfahren findet und die für jeden besondern Fall einzig ist. Die zweite begreift die nega-

tiven Werthe und die imaginairen Ausdrücke, welche ich unter dem Namen algebraische Bestimmungen anzeigen werde, weil sie ihr Dasein nur der algebraischen Zeichenverbindung verdanken.

Von den Gleichungen, welche sich auf eine ähnliche Art wie die Gleichungen vom zweiten Grade auflösen lassen.

§. 160.

Die Eigenschaft dieser Gleichungen besteht darin, daß sie nicht mehr als zwei Potenzen von der unbekannten enthalten dürfen, von welchen der Exponent des einen das Doppelte des andern ist; ihre allgemeine Formel ist

$$x^{2m} + px^m = q,$$

wo p und q bekannte Größen bezeichnen.

Nimmt man zuvörderst x^m für die unbekannte Größe, oder setzt man $x^m = u$, so wird man haben

$$x^{2m} = u^2,$$

woraus folgt

$$u^2 + pu = q,$$

$$u = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2} \text{ (§. 109)};$$

und wenn man wieder x^m für u setzt, so kommt

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

eine Gleichung von zwei Gliedern, weil die Größe

$$-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

indem sie lauter bekannte mit den gegebenen Größen vorzunehmende Operationen enthält, als eine bekannte Größe betrachtet werden kann.

Bezeichnen wir nun diese beiden Werthe durch a und a', so erhalten wir

$$x^m = a \quad \text{und} \quad x^m = a',$$

woraus man findet

$$x = \sqrt[m]{a} \quad \text{und} \quad x = \sqrt[m]{a'}.$$

Wenn der Exponent m gerade wäre, so würde man statt der beiden obigen Werthe vier erhalten, weil in diesem Fall auch das letzte Wurzelzeichen das Zeichen $\pm$ annehmen könnte; dieses würde geben

$$x = +\sqrt[m]{a}, \quad x = +\sqrt[m]{a'};$$
$$x = -\sqrt[m]{a}, \quad x = -\sqrt[m]{a'};$$

und diese vier Werthe sind alle reell, wenn die Größen a und a' positiv sind.

Alle diese Werthe von x können durch eine einzige Formel ausgedrückt werden, indem man die Wurzel aus beiden Theilen der Gleichung anzeigt,

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

welches geben würde

$$x = \sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}}.$$

Die folgende Aufgabe führt auf eine Gleichung dieser Gattung.

§. 161.

Die Zahl 6 in zwei Factoren zu zerlegen, daß die Summe ihrer Kuben 35 betrage.

Es sei x einer dieser Factoren, so ist der andere $\frac{6}{x}$, und man hat für die Summe ihrer Kuben x^3 und $\frac{216}{x^3}$ die Gleichung

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35,$$

woraus man erhält

$$x^6 + 216 = 35x^3$$

oder

$$x^6 - 35x^3 = -216.$$

Nimmt man nun x^3 für die unbekannte Größe, so erhält man, nach der Regel der Gleichungen des zweiten Grades

$$x^3 = \tfrac{35}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{35}{2})^2 - 216}.$$

Führt man die angezeigten Zahlenrechnungen aus, so wird man finden

$$\left(\tfrac{35}{2}\right)^2 = \tfrac{1225}{4},$$

$$\sqrt{\left(\tfrac{35}{2}\right)^2 - 216} = \sqrt{\tfrac{361}{4}} = \tfrac{19}{2},$$

und es wird also sein

$$x^3 = \tfrac{35}{2} + \tfrac{19}{2} = \tfrac{54}{2} = 27,$$

$$x^3 = \tfrac{35}{2} - \tfrac{19}{2} = \tfrac{16}{2} = 8,$$

woraus folgt

$$x = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Der erste Werth giebt für den zweiten Factor $\frac{6}{3}$ oder 2, während daß der zweite Werth aus $\frac{6}{2}$ oder 3 besteht; man hat also in einem Fall 3 und 2 für die gesuchten Factoren, im andern 2 und 3. Diese zwei Auflösungen unterscheiden sich also nur in einer veränderten Ordnung ihrer Factoren der gegebenen Zahl 6.

§. 162.

Die Gleichungen, welche wir so eben behandelt haben, sind ebenfalls in dem in §. 159 gezeigten allgemeinen Gesetze begriffen; denn man muß die Werthe $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{a'}$ durch die Wurzeln der Einheit des Grades m multipliciren.

Wendet man diese Betrachtungen auf die Gleichung

$$x^6 - 35x^3 = -216$$

an, so findet man folgende sechs Wurzeln:

$$x = 1 \times 3 \qquad x = 1 \times 2,$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 2,$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 2;$$

von welchen die beiden ersten die einzigen reellen sind.

Von den Wurzelrechnungen.

§. 163.

Die große Zahl der Fälle, in welchen man die Wurzel nicht genau ausziehen kann, und die Länge der nöthigen Operationen, solche durch Näherung zu erhalten, hat die Algebraisten bewogen, unmittelbar aus den unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen die mit ihren Wurzeln angezeigten Hauptoperationen auszuführen und so viel als möglich die Resultate zu vereinfachen, so daß die verwickelteste Operation erst am Ende der Rechnung vorkommt, d. h. die Wurzelausziehung, welche nunmehr nur aus den kleinsten Zahlen oder aus den einfachsten Ausdrücken, welche die vorgegebenen Aufgaben zulassen, auszuüben ist.

Die Addition und Subtraction der unähnlichen Wurzelgrößen kann nur durch die Zeichen + und — angezeigt werden. Z. B. die Summen

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b},$$

so wie die Differenzen

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$$

sind keines andern Ausdrucks fähig.

So verhält es sich nicht mit der Größe

$$4a\sqrt[3]{2b} + \sqrt[3]{16a^3b} - \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b},$$

weil die Wurzelgrößen, aus welchen sie zusammengesetzt sind, mittelst der in §. 130 angezeigten Vereinfachung ähnlich werden können. Man wird sogleich bemerken, daß

$$\sqrt[3]{16a^3b} = \sqrt[3]{8a^3 . 2b} \quad \text{oder} \quad 2a\sqrt[3]{2b} \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{2a^6b} = \sqrt[3]{a^6 . 2b} \quad \text{oder} \quad a^2\sqrt[3]{2b}$$

es kömmt also

$$4a\sqrt[3]{2b} + 2a\sqrt[3]{2b} - \frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b},$$

und indem man reducirt, so erhält man

$$6a\sqrt[3]{2b} - \frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b} \quad \text{oder} \quad (6d-5c)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

§. 164.

In Betreff der andern Operationen beruht die Rechnung mit den Wurzelgrößen auf dem schon angeführten Princip: **Wenn man die verschiedenen Factoren eines Products zu einerlei Potenz erhebt, so ist auch das Product zu dieser Potenz erhoben.** Andrerseits ist es sichtbar, daß man eine Wurzelgröße zu der Potenz des Wurzelexponenten erhebt, wenn man ihn wegläßt. Z. B. $\sqrt[7]{a}$ zur siebenten Potenz erhoben, ist nur a, weil diese Operation die umgekehrte von der ist, welche das Zeichen $\sqrt[7]{\ }$ andeutet und nur die Größe a auf ihren ersten Zustand zurückbringt.

Dieses festgesetzt, wenn z. B. in dem Ausdruck

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b}$$

man die Wurzelzeichen wegläßt, so wird das Resultat ab die siebente Potenz des oben angezeigten Products sein, und wenn man die siebente Wurzel nimmt, so schließt man hieraus

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{ab}.$$

Dieses Raisonnement, das man in jedem andern Falle anwenden kann, zeigt, daß, **um zwei Wurzelausdrücke von einerlei Grade mit einander zu multipliciren, man das Product der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen machen und ihm ein Wurzelzeichen des nämlichen Grades geben müsse.**

Vermittelst dieser Regel hat man

$$3\sqrt{2ab^3} \times 7\sqrt{5a^3bc} = 21\sqrt{10a^4b^4 \times c} = 21a^2b^2\sqrt{10c};$$

$$4\sqrt{a^2-b^2} \times \sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} = 4\sqrt{a^4-b^4}.$$

$$\sqrt[5]{\frac{2a^9 - a^3b^6}{a^4 - b^4}} \times \sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2 + b^5c^2}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{2a^9 - a^3b^6}{a^4 - b^4} \times \frac{a^2b^3c^2 + b^5c^2}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6 - b^6)}{a^4 - b^4} \times \frac{b^3c^2}{d^2}(a^2 + b^2)}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2}{d^2} \times \frac{2a^6 - b^6}{a^2 - b^2}},$$

weil

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2).$$

§. 165.

Bedenkt man, daß die siebente Potenz des Ausdrucks $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, z. B. $= \frac{a}{b}$ ist, so wird man schließen, indem man von diesem letzten Ausdruck die siebente Wurzel nimmt, daß

$$\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}} = \sqrt[7]{\frac{a}{b}};$$

woraus folgt, daß, um zwei Wurzelgrößen von einerlei Grade durch einander zu dividiren, man die Wurzel desselben Grades aus dem Quotienten von den unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen ziehen müsse.

Durch diese Regel findet man, daß

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{6ab}{3a}} = \sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a + b}} = \sqrt{a - b};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{a^3b^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}.$$

§. 166.

Aus der in §. 164 gegebenen Multiplicationsregel der

Wurzelzeichen von einerlei Grade folgt, daß, um eine Wurzelgröße zu irgend einer Potenz zu erheben, nur die Ausziehung der nämlichen Wurzel aus der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größe zu dieser Potenz erhoben nöthig sei; denn z. B. $\sqrt[5]{ab}$ zur dritten Potenz zu erheben, heißt: das Product

$$\sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab}$$

ausführen; und da die Wurzeln von einerlei Grade sind, so muß (§. 164) man die unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen mit einander multipliciren und dann aus diesem Producte die besagte Wurzel ausziehen. Dieses giebt

$$\sqrt[5]{a^3 b^3}.$$

Eben so, $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ zur vierten Potenz erhoben, giebt $\sqrt[7]{a^8 b^{12}}$, welches sich reducirt zu

$$ab\sqrt[7]{ab^5},$$

indem man $a^8 b^{12}$ in $a^7 b^7 \times ab^5$ zerlegt und die Wurzel des Factors $a^7 b^7$ nimmt (§. 130).

Es ist auch rathsam, zu merken, daß, wenn der Exponent der Wurzel, auf welchen man die verlangte Größe erhebt, durch den der Potenz theilbar ist, diese Operation bewirkt wird, indem man den Exponenten des ersten durch den des zweiten dividirt. Z. B.

$$(\sqrt[6]{a})^2 = \sqrt[3]{a},$$

weil $\frac{6}{2} = 3$ ist.

In der That bezeichnet die $\sqrt[6]{a}$ eine Größe, welche sechsmal als Factor in a enthalten ist, und die Größe $\sqrt[3]{a}$, welche man erhält, indem man den Exponenten 6 durch 2 dividirt, ist auch nur dreimal Factor in a. Der Natur der Sache nach ist also dieser Werth dem Producte der beiden ersten Factoren gleich; sie ist daher die zweite Potenz von einem dieser Factoren oder $\sqrt[6]{a}$.

Dasselbe Raisonnement werden wir bei dem folgenden Beispiel und bei jedem andern anwenden.

$$\left(\sqrt[12]{a^2b}\right)^3 = \sqrt[4]{a^2b}.$$

§. 167.

Wenn man die Regeln des vorhergehenden §. umkehrt, erhält man diejenigen, welche bei Ausziehung der Wurzeln aus Wurzelgrößen erfolgen müssen.

Man sieht zuvörderst aus der ersten, daß, **wenn die Exponenten der Größen, welche unter dem Wurzelzeichen stehen, durch die Exponenten derjenigen Wurzeln, welche man ausziehen will, theilbar sind, sich diese Operation so ausführen läßt, als wenn sie keine Wurzel hätte, und man setzt sodann dem Resultat das Wurzelzeichen vor.**

Man findet z. B.

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2};$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Aus der zweiten Regel des vorigen §. folgt, **daß die Wurzelausziehung aus Wurzelgrößen im Allgemeinen geschieht, wenn man den Exponenten der Wurzelgröße mit dem Exponenten der Wurzel, die man ausziehen will, multiplicirt.**

Durch diese zweite Regel findet man, daß

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4};$$

denn $\sqrt[5]{a^4}$ ist eine Größe, die fünfmal als Factor gebraucht werden muß, um a^4 zu haben (§. 24 und 129); aber die Kubikwurzel aus $\sqrt[5]{a^4}$ muß auch dreimal als Factor in dieser letztern Größe vorkommen, also muß sie 5×3 oder 15 mal als Factor in der ersten Größe a^4 vorkommen, folglich

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. Eben so beweist man, daß

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}.$$

§. 168.

Weil es erwiesen ist, daß wenn man den Exponenten von einer unter dem Wurzelzeichen stehenden Größe mit einer Zahl multiplicirt, diese angezeigte Wurzel alsdann auf den bezeichneten Grad erhoben wird (§. 166), und daß, wenn man den Wurzelexponenten zu gleicher Zeit mit der nämlichen Zahl multiplicirt (§. 167), man aus dem Resultat eine Wurzel von gleichem Grade mit der gebildeten Potenz ziehet, so folgt hieraus, daß diese zweite Operation die vorgegebene Größe auf ihren ersten Zustand zurückbringt.

Z. B. der Ausdruck $\sqrt[5]{a^3}$ läßt sich verwandeln in $\sqrt[35]{a^{21}}$, den man erhält, wenn man die Exponenten 5 und 3 mit 7 multiplicirt; denn den Exponenten a^3 mit 7 multipliciren, heißt aus der Wurzelgröße $\sqrt[5]{a^{21}}$ die siebente Potenz der vorgegebenen Wurzelgröße machen, und den Exponenten 5 der Wurzelgröße $\sqrt[5]{a^{21}}$ mit 7 multipliciren, heißt die siebente Wurzel aus dem Resultate ziehen, ein Verfahren, welches das erstere vernichtet.

§. 169.

Mittelst dieser doppelten Operation bringt man eine beliebige Anzahl von Wurzelgrößen von vorgegebenen Graden auf denselben Grad, indem man zugleich den Exponenten jedes Wurzelzeichens und der damit verbundenen Größen durch das Product aller andern **Wurzeln multiplicirt.** Die Gleichheit der neuen Wurzelexponenten ist für diesen Fall klar, weil sie aus dem Product aller ersten Wurzelexponenten entstanden sind, und nach dem, was vorhergeht, hat keine Wurzelgröße ihren Werth geändert.

Man verwandelt nach dieser Regel

$$\sqrt[5]{a^3 b^2} \text{ und } \sqrt[7]{c^4 d^3}$$

in $\sqrt[35]{a^{21} b^{14}}$ und $\sqrt[35]{c^{20} d^{15}}$;

eben so die drei Größen

$$\sqrt[3]{ab^2}, \quad \sqrt[5]{a^2 c^3}, \quad \sqrt[7]{b^4 c^5}$$

geben gegenseitig

$$\sqrt[105]{a^{35} b^{70}}, \quad \sqrt[105]{a^{42} c^{63}}, \quad \sqrt[105]{b^{60} c^{45}}.$$

Wenn man Zahlen unter dem Wurzelzeichen hätte, würde man sie durch das Product der andern Wurzelexponenten zu der verlangten Potenz erheben müssen.

§. 170.

Eben so kann man einen Factor unter das Wurzelzeichen setzen, wenn derselbe davor steht, indem man denselben durch den Wurzelexponenten zu der verlangten Potenz erhebt.

Man wird also z. B. verwandeln

a^2 in $\sqrt[5]{a^{10}}$ und $2a\sqrt[3]{b}$ in $\sqrt[3]{8a^3 b}$.

§. 171.

Nachdem wir durch die vorhergehende Verwandlung beliebige Wurzelgrößen auf einerlei Grad gebracht haben, so wendet man auf sie ohne Schwierigkeit die in den §. 164 und 165 für die Multiplication und Division der Wurzelgrößen desselben Grades gegebenen Regeln an.

Es sei im Allgemeinen

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s};$$

verwandle ich (§. 169)

$$\sqrt[m]{a^p b^q}, \quad \sqrt[n]{b^r c^s}$$

in $\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}}$, $\sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}}$,

so giebt die Regel des §. 164

$\sqrt[mn]{}$

$$\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}$$

für das Product der vorgelegten Wurzeln.

Man hat auch nach §. 165

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq}}{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Bemerkungen über einige ganz besondere Fälle der Rechnung mit Wurzelgrößen.

§. 172.

Die Regeln, auf welche man die Rechnung mit den Wurzelgrößen zurückgeführt hat, werden ohne Schwierigkeit auf reelle Größen angewendet; in Betreff der imaginairen Größen würden sie uns aber zu falschen Resultaten führen, wenn man sie nicht mit einigen Bemerkungen, welche von den Eigenschaften der zweigliedrigen Gleichungen abstammen, begleitete.

Z. B. die Regel des §. 164 giebt unmittelbar

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2};$$

und wenn man sich begnügte, $+a$ für $\sqrt{a^2}$ zu nehmen, so würde das Resultat offenbar falsch sein, weil das Product $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ das Quadrat von der $\sqrt{-a}$ ist, welches man erhält, wenn man das Wurzelzeichen wegläßt, und ist folglich gleich $-a$.

Bezout hat diese Schwierigkeit sehr gut gehoben, indem er bemerkt, daß, wenn man nicht weiß, von welcher Wurzel a^2 herkomme, und die Wurzel davon verlangt wird, müsse man sowohl $+a$ als $-a$ angeben; allein, wenn man im voraus weiß, welche dieser zwei Wurzeln mit sich selbst multiplicirt worden, um a^2 zu bilden, dann steht es nicht mehr in unserer Willkühr, eine für die andere anzunehmen. Dieser Fall ist es offenbar bei $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$;

man weiß alsdann, daß die Größe a^2, die unter dem Wurzelzeichen $\sqrt{a^2}$ steht, aus $-a$ multiplicirt mit $-a$ herkommt; die Zweideutigkeit hat daher nicht mehr Statt; und will man hier die Wurzel haben, so muß man $-a$ setzen.

Dieselbe Verlegenheit fände auch bei dem Product $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ Statt, wenn man nicht, weil gar kein — Zeichen in dem Ausdrucke da ist, geleitet würde, unmittelbar den positiven Werth von $\sqrt{a^2}$ zu nehmen. Man müßte bedenken, daß, da in diesem Falle a^2 von $+a$ multiplicirt mit $+a$ kommt, die Wurzel daraus nothwendig $+a$ sein muß.

Diese Schlüsse lassen über den so eben beobachteten besondern Fall keinen Zweifel übrig; allein es giebt noch andere, die sich nur deutlich durch die Eigenschaften der zweigliedrigen Gleichungen erklären lassen.

§. 173.

Wenn man z. B. das Product aus $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$ verlangte, so würde man, indem man die zweite Wurzelgröße auf den nämlichen Grad, den die erste hat, bringt (§. 169), haben

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{a}.$$

Dieses Resultat wäre reel, obschon es sichtbar dies nicht sein kann, weil die reelle Größe $\sqrt[4]{a}$, mit der imaginairen $\sqrt{-1}$ multiplicirt, nothwendig ein imaginaires Product geben muß. Indessen muß man doch nicht glauben, daß der Ausdruck $\sqrt[4]{a}$ durchaus falsch sei, sondern daß man es alsdann in einem zu engen Sinne genommen habe.

In der That auch, wenn man $\sqrt[4]{a}$ algebraisch betrachtet, so kann dieser Ausdruck den Werth einer unbekannten Größe x in der zweigliedrigen Gleichung

$$x^4 - a = 0$$

vorstellen. Diese Gleichung enthält aber vier verschiedene

Werthe (§. 159); denn es sei $a = \alpha^4$, wo α den Zahlenwerth von $\sqrt[4]{a}$, von dem Zeichen abstrahirt, vorstellt, oder die arithmetische Bestimmung von dieser Größe, so wird man die vier Werthe

$$\alpha \times +1, \quad \alpha \times -1, \quad \alpha \times +\sqrt{-1}, \quad \alpha \times -\sqrt{-1}$$

haben, davon der dritte Werth gerade das vorgegebene Product ist.

Man wird mit ein wenig Aufmerksamkeit die Ursache der obigen Zweideutigkeit erkennen. Denn die zweite Potenz + 1 von — 1, unter das Quadratwurzelzeichen gesetzt, kann sowohl von $+1 \times +1$, als auch von -1×-1 herkommen, man führt auf diese Art in der Größe $\sqrt[4]{1}$ zwei Werthe ein, die in $\sqrt{-1}$ sich nicht befanden.

Ueberhaupt führt der Grund, woraus die Regel gezogen wurde, das Product wegen der Wurzelfactoren $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$ zu bilden, zu der Erhebung dieses Products zu der Potenz mn; denn es sei z das Product aus den obigen Factoren, oder es sei

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = z.$$

Erhebt man zuvörderst beide Seiten zur m^{ten} Potenz, so hätte man gehabt

$$a\sqrt[n]{b^m} = z^m;$$

erhebt man sie nochmals zur n^{ten} Potenz, so wäre

$$a^n b^m = z^{mn}.$$

Da dieses Product nur durch seine Potenz vom Grade mn bekannt ist oder durch eine zweigliedrige Gleichung von diesem Grade, so muß es auch mn Werthe haben (§. 159). Auch begreift man dieses ganz leicht, wenn man beachtet, daß da die Ausdrücke $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$ nichts anders sind als die Werthe der unbekannten x, y in den zwei zweigliedrigen Gleichungen

$$x^m - a = 0 \qquad y^n - b = 0,$$

und folglich der Werthe m und n fähig, so könnte man, wenn

man jeden der m Werthe von x mit jedem der n Werthe von y verbindet, aus dem verlangten Product mn Werthe erhalten

Wenn von reellen Größen die Rede ist, so ist die Wahl der Werthe nicht schwer, weil jeder reelle Werth höchstens zwei Zeichen hat (§. 157) und sonst in nichts verschieden ist.

§. 174.

Bedient man sich der Transformation in §. 159, so verschwinden die Schwierigkeiten wegen der Wurzeln aus $+1$ und aus -1; denn man setze $x = \alpha t$ und $y = \beta u$; wo α und β die absoluten Zahlenwerthe von $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$ bedeuten, ohne Rücksicht auf ihr Zeichen. Die Gleichungen

$$x^m \mp a = 0, \qquad y^m \mp b = 0$$

werden $$t^m \mp 1 = 0, \qquad u^n \mp 1 = 0,$$

und hieraus zieht man den Ausdruck

$$xy = \sqrt[m]{\pm a} \times \sqrt[n]{\pm b} = \alpha\beta tu = \alpha\beta \sqrt[m]{\pm 1} \times \sqrt[n]{\pm 1};$$

in welchem $\alpha\beta$ das Product der Zahlen $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ oder die arithmetischen Werthe von der mn^{ten} Wurzel aus der Zahl $a^n b^m$ vorstellt.

Wollte man das Product der Wurzelgrößen $\sqrt[m]{\pm a}$, $\sqrt[n]{\pm b}$ durch eine specielle Bestimmung dieser Wurzelgrößen particularisiren, so müßte man nach den Gleichungen

$$t^m \mp = 0, \qquad u^n \mp 1 = 0$$

die verschiedenen Ausdrücke von $\sqrt[m]{\pm 1}$, $\sqrt[n]{\pm 1}$ finden und sie schicklich combiniren.

Uebrigens kommen dergleichen Rechnungen nur bei sehr einfachen Fällen vor, wovon hier die merkwürdigsten folgen:

1) $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\,(\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$;

Man lasse das Wurzelzeichen von $\sqrt{-1}$ weg, so ist

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$$

2) $$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{-1})^2.$$

Hier darf nicht -1 mit -1 multiplicirt werden, das würde die Zweideutigkeit von §. 173 hervorbringen; man bemerke nur, daß das Quadrat der vierten Wurzel nichts anders ist als die Quadratwurzel ausziehen, und es erscheint alsdann

$$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \times \sqrt{-1};$$

$$3)\ \sqrt[6]{-a} \times \sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{ab} \times (\sqrt[6]{-1})^2 = \sqrt[6]{ab} \times \sqrt[3]{-1}$$

$$= \sqrt[6]{ab} \times -1 = -\sqrt[6]{ab}.$$

Man findet so abwechselnd reelle und imaginaire Resultate.

Rechnung mit gebrochenen Exponenten.

§. 175.

Bezeichnet man die Wurzelgrößen mit gebrochenen Exponenten, die mit ihnen einerlei sind (§. 132), so giebt die unmittelbare Anwendung der Exponentenregel die nämlichen Resultate, als die in der Rechnung mit Wurzelgrößen gebräuchlichen Verfahrungsarten.

In der That, transformirt man z. B.

$$\sqrt[5]{a^3 b^2}, \qquad \sqrt[5]{a^3 c^2}$$

in

$$a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}}, \qquad a^{\frac{3}{5}} c^{\frac{2}{5}},$$

so wird man haben

$$\sqrt[5]{a^3 b^2} \times \sqrt[5]{a^3 c^2} = a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} c^{\frac{2}{5}} =$$

$$a^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{6}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{2}{5}}.$$

Bemerkt man nun, daß $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$, und daß folglich

$$a^{\frac{6}{5}} = a^{1+\frac{1}{5}} = a \times a^{\frac{1}{5}} \quad (\text{§. } 25),$$

und daß $a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{2}{5}}$ gleichgeltend ist mit $\sqrt[5]{ab^2 c^2}$, so wird kommen

$$\sqrt[5]{a^3 b^2} \times \sqrt[5]{a^3 c^2} = a\sqrt[5]{ab^2 c^2};$$

dieses Resultat ist nicht allein genau, sondern auch auf seine einfachsten Ausdrücke reducirt.

Es sei das allgemeine Beispiel $\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s}$; die vorgegebenen Wurzelgrößen verwandeln sich in

$$a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}, \quad b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}},$$

und es kommt nach den Exponentenregeln (§. 25),

$$a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}} \times b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}} = a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}.$$

Will man nun die Addition der Brüche $\frac{q}{m}$ und $\frac{r}{n}$ wirklich verrichten, so müssen sie unter einerlei Nenner gebracht werden, und um in die Resultate Gleichförmigkeit zu bringen, so muß dieses auch mit den Brüchen $\frac{p}{m}$, $\frac{s}{n}$ geschehen; hierdurch erhält man

$$a^{\frac{np}{mn}} b^{\frac{nq+mr}{mn}} c^{\frac{ms}{mn}};$$

und geht man zu den Wurzelzeichen über, so hat man

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s} = \sqrt[nm]{a^{np} b^{nq+mr} c^{ms}}.$$

§. 176.

Die Division mit solchen Größen wird eben so leicht als die Multiplication ausgeführt. Man hat z. B.

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{\sqrt[5]{a^4 c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}} c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}} c^{\frac{1}{5}}}, \text{ (§. 38),}$$

welches sich reducirt auf

$$\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}}};$$

und wenn man zu den Wurzelgrößen übergeht, so hat man

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{\sqrt[5]{a^4 c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}.$$

Man hat allgemein

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}};$$

und wenn man die Brucherponenten auf einerlei Nenner bringt, um die angezeigte Subtraction auszuführen, so findet man

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}} b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ms}}}$$

Es ist leicht zu begreifen, daß die Reduction der Bruchexponenten auf einerlei Nenner hier die Stelle der Reduction von den Wurzelgrößen zu einerlei Grade vertritt und ganz genau zu denselben Resultaten führt (§. 171).

§. 177.

Es ist durch die Regel in §. 127 eben so einleuchtend, daß

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{np}{m}} = \sqrt[m]{a^{np}}$$

und durch die in §. 129, daß

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{mn}} = \sqrt[mn]{a^p}.$$

Die Rechnung mit gebrochenen Exponenten ist einer der merkwürdigsten Fälle, welche beweisen, wie nützlich die Einführung zweckmäßiger algebraischer Zeichen sei. Die genaueste Aehnlichkeit, welche gebrochene und ganze Exponenten unter sich haben, verstattet ungezweifelt, daß die Grundsätze, die man bei Rechnung der letztern befolgte, genau auf die erstern angewandt werden können, da man hingegen, wenn man die Wurzelgrößen mit $\sqrt{\ }$ bezeichnet, ganz andere Grundsätze ausfinden mußte, um solche mit Gewißheit machen zu können. Je mehr man Fortschritte in der Algebra macht, desto mehr sieht man die Vortheile ein, welche aus der Bezeichnung der Exponenten entstehen, eine Bezeichnung, die Descartes zuerst einführte.

Allgemeine Theorie der Gleichungen.

§. 178.

Die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade sind es eigentlich allein, welche einer vollständigen Auflösung fähig sind; allein man hat jedoch bei den Gleichungen von jedem höhern Grade Eigenschaften entdeckt, die allen gemein sind und welche zu deren Auflösung führen, in so fern die unbekannten Größen Zahlen sind. Diese Eigenschaften gewähren viele Schlußfolgen, welche in den höhern Theilen der Algebra von großer Wichtigkeit sind, hängen aber von einer gewissen Form der Gleichungen ab, unter welche dieselben gebracht werden können.

Nimmt man die allgemeinste Gestalt an, unter der sich eine höhere Gleichung zeigen kann, so enthält sie in ihren Gliedern die unbekannte Größe von der höchsten Potenz an bis zur ersten Potenz, jede dieser Potenzen ist multiplicirt mit bekannten Größen, und dann ist noch ein Glied vorhanden, das eine bekannte Zahl ist.

Eine Gleichung vom fünften Grade z. B. wird alle Potenzen der unbekannten Größe von der ersten bis zur fünften enthalten; sind mehrere Glieder mit derselben Potenz der unbekannten Größe multiplicirt, so muß man sie, wie im §. 108 beim zweiten Grad gelehrt worden, in ein einziges Glied zusammenziehen. Endlich bringt man, was man auch im gedachten §. gemacht hat, alle Glieder der Gleichung auf eine einzige Seite, so wird die andere nothwendig gleich Null sein müssen, und indem man das höchste Glied positiv setzen wird, muß man alle Zeichen der Gleichung ändern.

Hiernach wird man folgenden Ausdruck erhalten

$$nx^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

worin man wohl beobachten muß, daß die Buchstaben n, p, q, r, s, t sowohl negative als positive Zahlen bedeuten können; nach diesem dividirt man alles durch n, um die höchste

Potenz der unbekannten Größe, nur mit der Einheit als Coefficient behaftet, zu erhalten, und setzt

$$\frac{p}{n} = P, \quad \frac{q}{n} = Q, \quad \frac{r}{n} = R, \quad \frac{s}{n} = S, \quad \frac{t}{n} = T,$$

so wird kommen

$$x^2 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0.$$

Wir werden in der Folge immer voraussetzen, daß man jede Gleichung auf die eben beschriebene Art vorbereitet habe, und daher die allgemeine Gleichung eines jeden Grades durch

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0$$

vorstellen.

Der durch Punkte angezeigte Zwischenraum wird ausgefüllt, wenn man dem Exponenten m einen bestimmten Werth giebt.

Jede Größe oder jeder Ausdruck, er sei reell oder imaginair, welcher, in einer solchergestalt vorbereiteten Gleichung statt x gesetzt, das erste Glied gleich Null macht und folglich der Gleichung ein Genüge thut, wird die **Wurzel der vorgelegten Gleichung** genannt; da aber hier nicht von Potenzen die Rede ist, so ist dieser Begriff weit allgemeiner als der, welchen wir bisher mit dem Worte **Wurzel** verbunden haben (§. 90, 129).

§. 179.

Folgender Satz, welcher mit den in §. 116 und 159 gegebenen Sätzen viel Aehnlichkeit hat, muß als fundamental betrachtet werden.

Wenn die Wurzel einer Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0$$

durch a vorgestellt wird, so muß sich das erste Glied dieser Gleichung durch $x - a$ genau dividiren lassen.

Denn da a ein Werth von x ist, so muß man nothwendigerweise haben

$$a^n + Pa^{n-1} + Qa^{n-2} \ldots\ldots + Ta + U = 0,$$

und folglich

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots\ldots - Ta;$$

so daß die vorgelegte Gleichung mit folgender

$$\left.\begin{array}{l} x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx \\ -a^n + Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots\ldots - Ta \end{array}\right\} = 0$$

völlig identisch ist und sich daher auf

$$\left.\begin{array}{l} x^n - a^n + P(x^{n-1} - a^{n-1}) + Q(x^{n-2} - a^{n-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + T(x-a) \end{array}\right\} = 0.$$

bringen läßt. Da nun die Größen

$$x^n - a^n, \quad x^{n-1} - a^{n-1}, \quad x^{n-2} - a^{n-2} \ldots\ldots x - a$$

alle durch $x - a$ theilbar sind (§. 158), so wird man offenbar alle Glieder des ersten Theils der vorgelegten Gleichung durch diese Größe dividiren können, und es wird daher dieser Theil durch $x - a$ theilbar sein, wie wir weiter oben bewiesen haben *).

§. 180.

Um den Quotienten zu erhalten, braucht man nur statt der Größen

$$x^n - a^n, \quad x^{n-1} - a^{n-1}, \quad x^{n-2} - a^{n-2} \ldots\ldots x - a$$

---

*) D'Alembert beweist eben diesen Satz folgendermaßen:

Wenn man annimmt, daß der erste Theil durch $x - a$ dividirt worden, und daß diese Division so weit getrieben sei, bis alle mit x behafteten Glieder erschöpft sind, so kann der Rest, wenn es einen solchen giebt, nicht mehr x enthalten. Bezeichnen wir nun diesen Rest durch R und den schon erhaltenen durch Q, so muß nothwendigerweise sein

$$x^n + Px^{n-1} \ldots\ldots + \text{u. s. w.} = Q(x-a) + R.$$

Da nun, wenn man a an die Stelle von x substituirt, der erste Theil verschwindet, weil nach der Voraussetzung a eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, so muß, da das Glied $Q(x-a)$, wegen des Factors $x - a$, welcher Null wird, ebenfalls verschwindet, $R = 0$ sein, und dieses unabhängig von der Substitution, denn da dieser Rest kein x enthält, so kann auch die Substitution auf ihn keinen Einfluß haben, und nach wie vor einerlei Werth behalten.

Hieraus folgt, daß in allen Fällen $R = 0$ und folglich

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \text{ u. s. w.}$$

durch $x - a$ genau theilbar ist.

die Quotienten zu substituiren, welche sie geben, wenn man sie durch $x - a$ dividirt, und welche respective sind

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-1},$$
$$x^{n-2} + ax^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-2},$$
$$x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 1.$$

Ordnet man dieses Resultat nach den Potenzen von x, so wird man finden

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-1},$$
$$+ Px^{n-2} + Pax^{n-3} \ldots\ldots + Pa^{n-2},$$
$$+ Qx^{n-3} \ldots\ldots + Qa^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ T.$$

§. 181.

Aus den bloßen Regeln der Division folgt, daß der erste Theil der Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \text{u. s. w.} = 0,$$

nachdem er durch $x - a$ dividirt worden ist, einen Quotienten von dieser Form

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + Q'x^{n-3} + \text{u. s. w.}$$

geben müsse, wo P', Q' u. s. w. bekannte von P, Q u. s. w. verschiedene Größen bezeichnen; man wird also erhalten $x^n + Px^{n-1} + \text{u. s. w.} = (x-a)(x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{u. s. w.})$; und den in §. 116 angestellten Betrachtungen zufolge muß der vorgelegten Gleichung auf zweierlei Art ein Genüge geschehen, nämlich wenn man entweder

$$x - a = 0 \text{ oder } x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{u. s. w.} = 0$$

setzt. Da nun, wenn die Gleichung

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{u. s. w.} = 0$$

eine Wurzel b hat, der erste Theil derselben durch $x - b$ theilbar ist und

$x^{n-1} + Px^{n-2} + \text{u. s. w.} = (x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \text{u. s. w.})$

und folglich

$$x^n + Px^{n-1} + \text{ꝛc.} = (x-a)(x-b)(x^{n-2} + P'x^{n-3} + \text{ꝛc.});$$

so kann also der vorgelegten Gleichung auf dreierlei Art ein Genüge geschehen, nämlich wenn man

$x - a = 0$ oder $x - b = 0$ oder $x^{n-2} + P'x^{n-3} + \text{u. s. w.} = 0$

setzt. Wenn nun die letzte dieser Gleichungen eine Wurzel hat, so wird sich der erste Theil derselben in zwei Factoren zerlegen lassen

$$x - c, \quad x^{n-3} + P''x^{n-4} + \text{u. s. w.} = 0,$$

und man wird also haben

$$x^n + Px^{n-1} + \text{u. s. w.}$$
$$= (x-a)(x-b)(x-c)(c^{n-3} + P'''x^{n-4} + \text{u. s. w.});$$

woraus man sieht, daß die Richtigkeit der vorgelegten Gleichung in vier verschiedenen Fällen Statt haben muß, nämlich wenn

$x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x^{n-3} + P''x^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$.

Schließt man auf diese Art weiter, so wird man nach einander Factoren von den Graden

$$n-4, \quad n-5, \quad n-6 \text{ u. s. w.}$$

erhalten, und wenn jeder dieser Factoren, nachdem er gleich Null gesetzt worden ist, einer Wurzel fähig ist, so wird der erste Theil der vorgelegten Gleichung auf die Form

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots(x-l)$$

zurück geführt worden sein, das heißt, er wird sich in so viele Factoren vom ersten Grade zerlegen lassen, als der Exponent n seines Grades Einheiten hat. Es wird sich daher die Richtigkeit der Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + \text{u. s. w.} = 0$$

auf n Arten vorstellen lassen, wenn man nämlich $x - a = 0$ oder $x - b = 0$ oder $x - c = 0$ oder $x - d = 0$ oder endlich $x - l = 0$ setzt.

Es ist aber wohl zu merken, daß diese Gleichungen alle wechselseitig als wahr betrachtet werden müssen, und daß man in offenbare Widersprüche verfallen würde, wenn man

annehmen wollte, daß sie alle zugleich Statt haben. In der That zieht man aus der Gleichung $x - a = 0$, $x = a$, dahingegen aus $x - b = 0$, $x = b$ folgt, welche Folgerungen nicht übereinstimmen können, wenn a und b ungleiche Größen sind.

§. 182.

Nachdem der erste Theil der vorgelegten Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + \text{u. s. w.} = 0$$

in n Factoren vom ersten Grade

$$x - a,\quad x - b,\quad x - c,\quad x - d,\quad \ldots\ldots\quad x - l$$

zerlegt worden ist, kann er nicht noch andere von diesem Grade enthalten. Denn wenn dieser erste Theil durch $x - a$ theilbar wäre, so müßte man nothwendigerweise haben

$$x^n + Px^{n-1} + \text{u. s. w.} = (x - a)(x^{n-1} + px^{n-2} + \text{u. s. w.})$$

und folglich

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots(x-l)$$
$$= (x-a)(x^{n-1} + px^{n-2} + \text{u. s. w.});$$

so kommt, wenn man x in α verwandelt,

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d)\ldots\ldots(\alpha-l)$$
$$= (\alpha-\alpha)(\alpha^{n-1} + px^{n-2} + \text{u. s. w.});$$

die zweite Hälfte verschwindet, weil der Factor $\alpha - \alpha$ Null ist, aber mit der ersten Hälfte verhält es sich nicht so, die das Product von Null verschiedenen Factoren ist, so lange α von jeder der Wurzeln a, b, c, d .... l verschieden ist; die Annahme ist also unwahr: **Eine Gleichung von einem beliebigen Grade kann also nicht mehr binomische Factoren von dem Grade zulassen als Einheiten in dem Exponenten ihres Grades sind, und kann folglich auch keine größere Anzahl von Wurzeln haben** *).

---

*) Dieser aus den *Annales de Mathématiques*, publiées par M. *Gergonne* (Siehe T. IV. pag. 209 — 210, Note) gezogene Beweis ist viel einfacher als derjenige, den ich in den vorhergehenden Ausgaben gegeben habe.

§. 183.

Sieht man eine Gleichung als das Product aus einer Anzahl Factoren

$$x-a,\quad x-b,\quad x-c,\quad x-d,\text{ u. s. w.}$$

gleich dem Exponenten ihres Grades an, so wird sie eine Form des in §. 135 angezeigten Products annehmen, mit der Ermäßigung, daß alle Glieder abwechselnd positiv und negativ sein werden.

Wenn man sich z. B. auf vier Factoren einschränkt, so wird man haben

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx & \\ - cx^3 + adx^2 - acdx & \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx & \\ + bdx^2 & \\ + cdx^2. & \end{aligned}$$

Da die zweiten Theile in den Binomialfactoren $x-a$, $x-b$, $x-c$ u. s. w. die Wurzeln der Gleichung mit einem entgegengesetzten Zeichen sind, so werden die in §. 135 bemerkbaren und in §. 136 allgemein bewiesenen Eigenschaften im gegenwärtigen Fall in folgender Art Statt haben:

Der Coefficient des zweiten mit entgegen gesetztem Zeichen genommenen Gliedes ist die Summe aller Wurzeln.

Der Coefficient des dritten Gliedes ist die Summe aller Producte von je zwei verschiedenen Wurzeln.

Der Coefficient des vierten Gliedes, mit einem entgegengesetzten Zeichen genommen, ist die Summe aller Producte von je drei verschiedenen Wurzeln, und so fort, indem man beobachtet, das Zeichen der Coefficienten von Gliedern in geraden Stellen zu verwandeln.

Das letzte Glied, welches, wie die andern, diesem Gesetze unterworfen ist, ist das Product aus Wurzeln.

Wenn man z. B. das Product aus den drei Factoren

$$x-5,\quad x+4,\quad x+3$$

gleich Null setzt, so wird man die Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$$

finden, deren Wurzeln also sein werden

$$+5, \quad -4, \quad -3;$$

man hat für ihre Summe

$$5 - 4 - 3 = -2;$$

für die ihrer Producte 2 zu 2,

$$+5\times-4 + 5\times-3 - 4\times-3 = -20 - 15 + 12 = -23,$$

und für das Product der drei Wurzeln

$$+5\times-4\times-3 = 60.$$

Dasselbe würde man auch aus den Coefficienten 2, —23, —60 ableiten, wenn man die Zeichen des zweiten und vierten Gliedes verwandelte.

Setzt man das Product der Factoren

$$x-2, \quad x-3 \quad \text{und} \quad x+5$$

gleich Null, so hat die entstehende Gleichung

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

kein Glied, welches x^2 oder die unmittelbar auf das erste Glied folgende niedere Potenz von x enthält; es fehlt also das zweite Glied, und dieses deswegen, weil die Summe der Wurzeln, mit einem entgegengesetzten Zeichen genommen, den Coefficienten dieses Gliedes bildet. Hier ist

$$2 + 3 - 5$$

oder Null, oder mit andern Worten, weil die Summe der positiven Wurzeln gleich der Summe der negativen ist *).

---

*) Man könnte glauben, daß es hinreichend sei, um die Wurzel einer durch

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

ausgedrückten Gleichung vom vierten Grade zu finden, diese Gleichung mit dem im §. 183 gefundenen Product zu vergleichen, mit Beobachtung dessen die Größen, welche sowohl in der einen als in der andern einerlei Potenz von x multipliciren, einander gleich zu setzen; es haben auch wirklich die meisten Verfasser der Elementarbücher geglaubt, hierdurch beweisen zu können, daß jede Gleichung irgend eines Grades ein Product aus so vielen einfachen Factoren ist, als der Exponent ihres Grades Einheiten hat; wir werden aber in der Folge sehen, daß

§. 184.

Betrachtet man eine Gleichung als das Product aus mehreren einfachen Binomialfactoren oder aus Binomialfactoren vom ersten Grade, so beweist §. 182, daß sie nicht mehr dergleichen haben kann, als der Exponent n ihres Grades angiebt; verbindet man aber diese Factoren zu je zwei verschiedenen, so erhält man dadurch Größen vom zweiten Grade, welche ebenfalls Factoren der vorgelegten Gleichung sind, und deren Anzahl angegeben wird durch

$$\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$$ (§. 140).

Z. B.

---

ihre Art zu schließen fehlerhaft sei. Wir haben diesen Satz in §. 182 nur bedingungsweise geschlossen, weil man, um ihn für völlig richtig annehmen zu können, vorher darthun muß, daß jede Gleichung von irgend einem Grade wenigstens eine Wurzel, es sei eine reelle oder imaginaire, haben muß, welches aber in den ersten Anfangsgründen nicht leicht geschehen kann, und glücklicherweise auch noch nicht nothwendig ist. Man kann die Betrachtungen nachsehen, welche ich im Complemente über diesen Gegenstand beigebracht habe.

Wenn man die Gleichungen

$$-a-b-c-d=p$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=q$$
$$-abc-abd-acd-bcd=r$$
$$abcd=s$$

bildet, um daraus die Werthe der Buchstaben a, b, c, d, welche die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sein würden, zu bestimmen, so würde der Calcul sehr verwickelt werden, wenn man das in §. 78 gebrauchte Verfahren dabei anbringen wollte, um die Werthe der unbekannten a, b, c, d zu bestimmen; wenn man indessen die erste der obigen Gleichungen durch a^3, die zweite derselben durch a^2, die dritte durch a multiplicirt und diese Producte Glied für Glied zur vierten hinzusetzt, so wird man erhalten

$$-a^4=pa^3+qa^2+ra+s,$$

woraus man durch eine einfache Versetzung schließt:

$$a^4+pa^3+qa^2+ra+s=0.$$

Diese Gleichung enthält zwar nur noch a, indessen ist sie der vorgelegten völlig ähnlich, so daß die Schwierigkeit a zu finden dieselbe ist als x zu erhalten.

Herr Castillon sagt (in den Berliner Memoiren vom Jahr 1789): „Man beweist zwar sehr gut in der Algebra, daß man aus der Multiplica„tion mehrerer Binomen vom ersten Grade Gleichungen von jedem beliebigen

Z. B. das erste Glied der Gleichung

$$x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0$$
$$- bx^3 + acx^2 - abdx$$
$$- cx^3 + adx^2 - acdx$$
$$- dx^3 + bcx^2 - bcdx$$
$$+ bdx^2$$
$$+ cdx^2,$$

welche aus dem Product von

$$(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$$

gebildet wird, kann sich auf folgende sechs verschiedene Arten in Factoren vom zweiten Grade zerlegen lassen:

$$(x - a)\ (x - b) \times (x - c)\ (x - d)$$
$$(x - a)\ (x - c) \times (x - b)\ (x - d)$$
$$(x - a)\ (x - d) \times (x - b)\ (x - c)$$
$$(x - b)\ (x - c) \times (x - a)\ (x - d)$$
$$(x - b)\ (x - d) \times (x - a)\ (x - c)$$
$$(x - c)\ (x - d) \times (x - a)\ (x - b);$$

„Grade bilden könne; aber man beweist nicht, daß eine durch die Multipli„cation mehrerer einfachen Binomen gebildete Gleichung auch solche Coeffi„cienten enthalten könne, die man ihr geben will."

Wenn man die drei ersten in a, b, c, d ausgedrückten Gleichungen, anstatt sie durch a^3, a^2 und a zu multipliciren, durch b^3, b^2 und b oder durch c^3, c^2 und c oder durch d^3, d^2 und d multipliciren, und noch die Producte zur vierten hinzusetzen würde, so würde man im ersten Fall

$$- b^4 = pb^3 + qb^2 + rb + s,$$

im zweiten

$$- c^4 = pc^3 + qc^2 + rc + s,$$

im dritten

$$- d^4 = pd^3 + qd^2 + rd + s$$

erhalten, woraus man sieht, daß man sowohl in Rücksicht auf a als auf b u. s. w. immer auf dieselbe Gleichung zurückkommt. In der That läßt sich keine Ursach denken, warum die eine der Größen a, b, c, d durch eine andere Operation als die andere gefunden werden sollte, da jede derselben auf einerlei Art von jeder Gleichung abhängt; es wird daher überhaupt, wenn beim Aufsuchen mehrerer unbekannten Größen über jede derselben einerlei Schlüsse gemacht, einerlei Operationen und einerlei bekannte Größen eingeführt werden müssen, jede dieser Größen nothwendig Wurzel einer und derselben Gleichung sein.

und hieraus folgt, daß eine Gleichung vom vierten Grade sechs Divisoren vom zweiten haben kann.

Wenn man die einfachen Factoren zu dreien und dreien combinirt, so findet man die Factoren vom dritten Grade der vorgelegten Gleichung; für eine Gleichung vom Grade n würde die Anzahl derselben sein

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

und so fort.

Von der Elimination zwischen den Gleichungen, die den ersten Grad übersteigen.

§. 185.

Die Regel in §. 78 oder das Verfahren in §. 84 reichen allezeit zu, um zwischen zwei Gleichungen eine unbekannte, die den ersten Grad nicht übersteigt, zu eliminiren (auszuscheiden, wegzuschaffen), von welchem Grade die andern unbekannten auch immer sein mögen; und selbst dann ist die Regel §. 78 noch zureichend, wenn die unbekannte auch nur in einer der vorgelegten Gleichungen vom ersten Grade ist.

Wenn z. B. die folgenden Gleichungen gegeben wären

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2,$$
$$x^2 + xy = n^2,$$

so zieht man aus der zweiten den Werth von y, der sein wird

$$y = \frac{n^2 - x^2}{x};$$

setzt man diesen Werth und sein Quadrat in die Stelle von y und von y^2 in die erste Gleichung, so erhält man ein Resultat, worin sich x nur allein vorfindet.

§. 186.

Wenn in beiden Gleichungen die beiden unbekannten Größen vom zweiten Grade wären, alsdann könnte man

die vorhergehende Methode nur anwenden, wenn man eine von den Gleichungen in Betreff der Größe x oder y auflöste.

Es seien z. B. die Gleichungen

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2,$$
$$x^2 + y^2 = n^2;$$

die zweite giebt

$$y = \pm\sqrt{n^2 - x^2}.$$

Substituiren wir in der ersten diesen Werth von y und sein Quadrat, so wird man erhalten

$$ax^2 \pm bx\sqrt{n^2 - x^2} + c(n^2 - x^2) = m^2.$$

Es scheint, als wäre die Absicht ganz erreicht, weil dies Resultat nicht mehr die unbekannte y enthält; allein man kann die Gleichung, worin freilich nur x ist, nicht auflösen, ohne sie vorher auf eine rationelle Form zu bringen, indem man das Wurzelzeichen, unter welchem die unbekannte steht, wegschafft.

Es ist begreiflich, daß wenn die Wurzelgröße allein auf einer Seite wäre, so würde sie durch Quadrirung dieser Seite verschwinden; vereinigt man also durch Versetzung der Glieder $\pm bx\sqrt{n^2 - x^2}$ und m^2 alle rationalen auf eine Seite, so würde man haben

$$ax^2 + c(n^2 - x^2) - m^2 = \mp bx\sqrt{n^2 - x^2},$$

und quadrirt man jede Seite, so wird man folgende Gleichung bilden

$$\left.\begin{array}{l} a^2x^4 + c^2(n^2 - x^2)^2 + m^4 \\ +2acx^2(n^2 - x^2) - 2am^2x^2 - 2cm^2(n^2 - x^2) \end{array}\right\} = b^2x^2(n^2 - x^2,$$

die keine Wurzelgröße mehr enthält.

Dieses Verfahren, eine Wurzelgröße aus einer Gleichung wegzuschaffen, muß wohl gemerkt werden, denn man hat oft Gelegenheit, Gebrauch davon zu machen; es bestehet darin, die wegzuschaffende Wurzelgröße zu isoliren und dann beide Seiten der vorgelegten Gleichung zu der durch den Wurzelgrad bezeichneten Potenz zu erheben.

§. 187.

Die Verwickelung dieses Verfahrens, welches, wenn mehrere Wurzelgrößen da sind, sehr groß wird, verbunden mit der Schwierigkeit, eine der vorgelegten Gleichungen in Betreff einer der unbekannten aufzulösen, eine Schwierigkeit, die bei dem gegenwärtigen Zustand der Algebra öfters unübersteiglich ist, hat eine Methode veranlaßt, aufzusuchen, vermittelst welcher man die Elimination mit Vermeidung jener Schwierigkeit beweist, dergestalt, daß am Ende die Auflösung der Gleichungen die letzte von den Operationen ist, welche die Auflösung der Aufgaben erfordern.

Um die Rechnungen zu erleichtern, bringt man die Gleichungen mit zwei unbekannten Größen unter die Gestalt von Gleichungen mit einer unbekannten, worin nur diejenige sichtbar bleibt, die man eliminiren will. Hätte man z. B.

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e,$$

so versetzte man alle Glieder nach einer Seite, indem man sie nach x ordnete; sie wird alsdann so aussehen:

$$x^2 + (ay + b)\,x - cy^2 - dy - e = 0,$$

und macht man, um abzukürzen,

$$ay + b = P, \quad -cy^2 - dy - e = Q,$$

so hätte man

$$x^2 + Px + Q = 0.$$

Die allgemeine Gleichung vom $m$ten Grade mit zwei unbekannten Größen muß alle Potenzen von x und von y enthalten, die diesen Grad nicht übersteigen, eben so auch darf die Summe der Exponenten von x und y in den Producten nicht über m steigen; man kann also die allgemeine Gleichung von einem Grade mit zwei unbekannten vorstellen durch

$$x^m+(a+by)x^{m-1}+(c+dy+ey^2)x^{m-2}+(f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(p+qy+ry^2\ldots+uy^{m-1})x+p'+q'y+r'y^2\ldots+v'y^m=0.$$

Man hat x^m in dieser Gleichung keinen Coefficienten

gegeben, weil man immer, durch Division, jedes beliebige Glied von seinem Multiplicator befreien kann; und macht man

$a + by = P$, $c + dy + ey^2 = Q$, $f + gy + hy^2 + ky^3 = R$,

. . . . . .

$p + qy \ldots + uy^{m-1} = T$, $p' + q'y \ldots + v'y^m = U$,

so wird die obige Gleichung folgende Form annehmen:

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0.$$

§. 188.

Es ist gut, zu bemerken, daß die Eliminirung von x zwischen zwei Gleichungen vom zweiten Grade,

$$x^2 + Px + Q = 0, \quad x^2 + P'x + Q' = 0,$$

sich unmittelbar ausführen läßt, wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt. Diese Operation giebt

$$(P - P')x + Q - Q' = 0,$$

woraus $$x = -\frac{Q - Q'}{P - P'};$$

Substituirt man diesen Werth in eine von den beiden vorgelegten Gleichungen, z. B. in die erste, so wird man finden

$$\frac{(Q - Q')^2}{(P - P')^2} - \frac{P(Q - Q')}{P - P'} + Q = 0.$$

Bringt man die Nenner weg, so erhält man

$$(Q - Q')^2 - P(P - P')(Q - Q') + Q(P - P')^2 = 0;$$

endlich wenn man die letzten zwei Glieder entwickelt und reducirt, so kommt

$$(Q - Q')^2 + (P - P')(PQ' - QP') = 0.$$

Es bleibt nur noch übrig, statt P, Q, P' und Q' die für den untersuchten Fall gehörigen besondern Werthe zu setzen.

§. 189.

Bevor wir weiter gehen, soll gezeigt werden, wie man erkennt, daß der Werth von irgend einer der unbekannten Größen zugleich den beiden Gleichungen genugthue. Um aber

die Begriffe besser zu fixiren, werde ich ein besonderes Beispiel nehmen; die Schlüsse werden deshalb nicht weniger allgemein sein.

Es seien die Gleichungen

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98 = 0 \ldots\ldots (1),$$

$$x^2 + 4xy + 2y^2 - 10 = 0 \ldots\ldots (2),$$

deren Ursprung ich aus einer Aufgabe annehme, nach welcher $y = 3$ sein soll.

Um diese Behauptung richtig zu finden, so muß man zuerst in jede Gleichung 3 statt y setzen, welches giebt

$$x^3 + 9x^2 + 27x - 98 = 0 \ldots\ldots (a),$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0 \ldots\ldots (b).$$

In diesen Gleichungen muß für x einerlei Werth angenommen werden, wenn der für y angegebene in beiden einerlei war. Wenn man den Werth von x durch α bezeichnet, so muß, in Gefolge des Beweises, in §. 179 sowohl die Gleichung (a) als auch die (b) mit $x - \alpha$ theilbar sein; daher nun haben beide Gleichungen einen gemeinschaftlichen Divisor, wovon $x - \alpha$ wenigstens ein Factor ist. Man findet in der That $x - 2$ als gemeinschaftlichen Divisor (§. 48). Man hat also $\alpha = 2$. Mithin kommt der Werth $y = 3$ der Aufgabe zu und entspricht $x = 2$.

Wenn noch einiger Zweifel übrig wäre, daß der gemeinschaftliche Divisor der beiden Gleichungen (a) und (b) zugleich den Werth von x geben müsse, so würde dieser Zweifel dadurch gehoben, daß man die Gleichungen unter die Form setzt:

$$(x^2 + 11x + 49)(x - 2) = 0,$$

$$(x + 14)(x - 2) = 0,$$

woraus es sehr sichtbar ist, daß beiden genügt werde, wenn man in ihnen $x = 2$ setzt.

§. 190.

Das Mittel, welches ich so eben angegeben habe, den

Werth von x zu finden, wenn der von y bekannt ist, kann unmittelbar bei der Elimination angewandt werden.

In der That, wenn man mit den Gleichungen (1) und (2) so verfährt, als untersuchte man, ob sie einen gemeinschaftlichen Divisor in x hätten, so kommt man, statt einen zu finden, zu einem Reste, der nur noch die unbekannte y und gegebene Zahlen enthält; und es ist einleuchtend, daß, wenn man darin statt y ihren Werth 3 setzte, er verschwinden müßte, weil durch dieselbe Substitution die Gleichungen (1) und (2) sich in die Gleichungen (a) und (b) verwandeln, die einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Setzen wir also diesen Rest gleich Null, so wird man die Bedingung ausdrücken, welche die Werthe von y erfüllen müssen, damit die beiden Gleichungen zugleich einerlei Werth für x zulassen können.

Die hier (S. 264.) beigefügte Tabelle enthält das Detail dieser Operation in Rücksicht auf die Gleichungen

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98 = 0,$$
$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 = 0,$$

welche uns im vorhergehenden §. beschäftigt haben; man findet für den letzten Divisor

$$(9y^2 + 10)x - 2y^3 - 10y - 98;$$

und den Rest gleich Null gesetzt, giebt

$$43y^6 + 345y^4 - 1960y^3 + 750y^2 - 2940y - 4302 = 0,$$

eine Gleichung, welche für y außer dem Werth 3, welchen wir oben vorausgesetzt haben, noch alle andere Werthe zuläßt, deren die Aufgabe fähig ist, und man nennt sie aus dieser Ursach **Endgleichung**.

Wenn der obige Rest annulirt wird, so wird der vorletzterem vorhergehende Rest der gemeinschaftliche Divisor von den vorgelegten Gleichungen, so daß, wenn er gleich Null gesetzt wird, er den Werth von x giebt, wenn man den Werth von y darin setzt. Weiß man z. B., daß $y = 3$, so würde man diese Zahl in der Größe

Zu Seite 263.

$$x^3 + 3x^2y + 3y^2x - 98 \;\big|\; x^2 + 4xy - 2y^2 - 10$$
$$-x^3 - 4x^2y + 2y^2x + 10x \;\big|\; x - y$$
$$-x^2y + 5y^2x + 10x - 98$$
$$+x^2y + 4y^2x - 2y^3 - 10y$$
1ster Rest $\ldots\ldots + (9y^2 + 10)x - 2y^3 - 10y - 98$

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 \;\big|\; (9y^2+10)x - 2y^3 - 10y - 98$$
oder besser $(9y^2+10)x^2 + 36xy^3 - 18y^4 - 110y^2 - 100 \;\big|\; (9y^2+10)x - 2y^3 - 10y - 98$
$+40xy$
$$-(9y^2+10)x^2 + 2xy^3 + 98x \;\big|\; x + 38y^3 + 50y + 98$$
$+10xy$
$$+38xy^3 - 18y^4 - 110y^2 - 100$$
$+50xy$
$+98x$
oder besser $(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x - 162y^6 - 1170y^4 - 2000y^2 - 1000$
$$-(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x + 76y^6 + 480y^4 + 3920y^3 + 500y^2 + 5880y + 9604$$
2ter Rest $\ldots\ldots - 86y^6 - 690y^4 + 3920y^3 - 1500y^2 + 5880y + 8604$

Setzt man nun diesen Rest gleich Null und dividirt nachher alle seine Glieder durch 2 und macht das erste positiv, so erhält man

$$43y^6 + 345y^4 - 1960y^3 + 750y^2 - 2940y - 4302 = 0.$$

$(9y^2 + 10)x - 2y^3 - 10y - 98$

substituiren, welche man dann Null setzen würde, und folgende Gleichung vom ersten Grade erhalten:

$$91x - 182 = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2.$$

§. 191.

Die Operation, welche wir so eben bei diesen besondern Gleichungen gemacht haben, läßt sich eben so auf jede beliebige Gleichungen anwenden

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0,$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots + Y'x + Z' = 0,$$

wo die zweite unbekannte Größe in den Coefficienten P, Q u. s. w., P' Q' u. s. w. gleichsam eingewickelt ist. Die Elimination der unbekannten Größe x würde man bewirken, indem man sie eben so wie den größten gemeinschaftlichen Theiler in der ersten Hälfte dieser Gleichungen sucht und den von x unabhängigen Rest gleich Null setzt.

Der im Allgemeinen ziemlich verwickelte Calcul kann in besondern Fällen mehrere nützliche Abkürzungen erhalten; allein die Details wären zu lang, um mich hier dabei aufhalten zu können; sie sind übrigens sehr leicht zu finden: ich nehme also an, daß im Laufe der Operation man keinen Factor in y, der allen Gliedern einerlei Restes gemein wäre, weglasse, und werde mich begnügen, alle Resultate, die aufhalten könnten, zu erläutern. Erstlich kann es geschehen, daß der Werth von y von selbst den vorletzten Rest zu Null macht; alsdann wird der vorhergehende Rest oder derjenige, in welchem x im zweiten Grade vorkommt, der gemeinschaftliche Divisor der beiden vorgelegten Gleichungen. Setzt man darin den Werth von y und macht sie gleich Null, so wird man eine Gleichung vom zweiten Grade, worin nur x, haben, deren zwei Werthe dem bekannten Werth von y entsprechen werden. Wenn dieser Werth wieder den Rest vom zweiten Grade zu Null machte, so müßte man seine Zuflucht

zu dem vorhergehenden nehmen, wo x auf den dritten Grad steigen würde, weil er, in diesem Falle, der gemeinschaftliche Divisor der beiden vorgelegten Gleichungen sein wird; und der Werth von y würde drei Werthen von x entsprechen. Ueberhaupt müßte man bis zu einem Reste zurückgehen, der durch die Substitution des Werths von y nicht verschwindet.

Es kann ferner geschehen, daß man keinen Rest findet, oder daß der Rest nur bekannte Größen enthält.

Im ersten Falle haben die beiden Gleichungen einen gemeinschaftlichen Divisor im eigentlichen Sinne, ohne irgend eine Bestimmung von y; sie sind also von der Form

$$P \times D = 0, \qquad Q \times D = 0,$$

wo D den gemeinschaftlichen Divisor vorstellt. Es ist klar, daß beiden Gleichungen zugleich genug gethan wird, wenn man zuerst $D = 0$ setzt, und diese Gleichung wird eine der unbekannten durch die andere bestimmen, wenn der Factor D sie alle beide enthält; enthält D nur gegebene Größen und x, so wird diese unbekannte bestimmt sein und die andere gänzlich unbestimmt bleiben.

Macht man nachgehends gemeinschaftlich

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

so wird man sich auch zwei Gleichungen verschaffen, welche bestimmte Auflösungen von der vorgelegten Frage darbieten könnten.

Es sei z. B.

$$(ax + by - c)(mx + ny - d) = 0,$$
$$(a'x + b'y - c')(mx + ny - d) = 0;$$

nimmt man vorerst den zweiten, d. i. den gemeinschaftlichen Factor gleich Null an, so wird man zwischen den unbekannten x und y nur die einzige Gleichung

$$mx + ny - d = 0$$

haben, und unter dieser Ansicht wird die Frage unbestimmt sein; allein läßt man diesen Factor weg, so wird man auf die Gleichungen

$ax+by-c=0$ $a'x+b'y-c'=0$
oder $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$
fallen; und in diesem Sinne wird die Frage bestimmt sein, weil man so viel Gleichungen als unbekannte Größen hat.

In dem Falle, wo der Rest nur gegebene Größen enthält, sind die beiden Gleichungen in Widerspruch; denn der gemeinschaftliche Divisor, der ihrem Da- und Beisammensein die Bestimmtheit giebt, kann hier nur unter einer nicht zu erfüllenden Bedingung Statt finden, weil sie auf gegebene Größen fällt und sie ein widersprechendes Resultat darstellt. Dieser Fall bezieht sich, wie man in §. 68 gesehen hat, auf die Gleichungen vom ersten Grade.

§. 192.

Es ist noch räthlich, vorher zu sagen, daß die Polynome in y, mit welchen man die partiellen Dividenden multiplicirt, um die Divisionen möglich zu machen, oft in den letzten Rest y Factoren einführen, die der Frage fremd sind, und die es machen, daß dieser Rest davon nicht die wahre Endgleichung ist. Um nicht über die Werthe von y, die aus diesen Factoren herrühren, in Irrthum zu fallen, so erzeugt sich bald der Gedanke, unmittelbar in den vorgelegten Gleichungen jeden der Werthe, welche die Gleichung, worin y allein ist, giebt, zu substituiren, denn alle Werthe, wodurch diese Gleichungen einen gemeinschaftlichen Divisor verlangen, gehören nothwendig zu der Frage, und die andern müssen ausgeschlossen werden. Man ahnet auch, daß die Endgleichung unvollkommen werden könnte, wenn man im Laufe der Rechnung irgend einen Factor in y auslassen würde; allein alle diese Umstände, die Hr. Bret im 15ten Cahier des *Journal de l'Ecole polytechnique* und durch Hrn. Lefébure in Nr. 3. des zweiten Theils der *Correspondance* derselben Schule abhandeln, machen in der Ausübung die Anwendung des oben angezeigten Verfahrens wenig bequem, und es ver-

dient also das Verfahren, welches ich nun nach Euler in dem folgenden §. vortragen will, vor jenem den Vorzug *).

§. 193.

Es seien die beiden Gleichungen

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0.$$

Betrachtet man nun $x - \alpha$ als den Factor, welchen beide Gleichungen mit einander gemein haben müssen, da y dem gemäß bestimmt ist; so kann man die erste als das Product aus dem Factor $x - \alpha$ in den Factor vom zweiten Grade $x^2 + px + q$ und die zweite als das Product von $x - \alpha$ in den Factor vom dritten Grade .....

$x^3 + p'x^2 + q'x + r'$, worin p und q, p', q' und r' unbestimmte Coefficienten sind; man wird also haben

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x - \alpha)(x^2 + px + q),$$
$$x^2 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x - \alpha)(x^3 + p'x^2 + q'x + r'),$$

Eliminirt man nun das Binomium $(x - \alpha)$ wie eine unbekannte Größe vom ersten Grade (§. 84), so findet man

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^3 + p'x^2 + q'x + r') =$$
$$(x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S')(x^2 + px + q).$$

Dieses Resultat muß richtig sein, ohne daß es nöthig ist, für x einen besondern Werth zu setzen; da nun dieses nur in dem Fall zutreffen kann, wenn der erste Theil aus eben den-

---

*) Aus dem hier Gesagten läßt sich leicht schließen, daß die Aufsuchung der Endgleichung aus zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen überhaupt eine bestimmte Aufgabe ist. Aber die nämliche Endgleichung kann einer unendlichen Menge von Systemen zugehören, worin zwei Gleichungen von zwei unbekannten Größen vorkommen. Kehrt man das Verfahren, wodurch man den größten gemeinschaftlichen Divisor erhält, um, so wird es äußerst leicht, diese nach Belieben zu bilden; aber diese Frage hat zu wenig Anwendung in den Anfangsgründen der Mathematik, um sich dabei aufzuhalten und bei kleinlichen Bemerkungen, wozu sie Gelegenheit geben könnte, zu verweilen. Dergleichen Dinge muß man der Scharfsicht der Leser überlassen, die selten die Wege verfehlen, von selbst darauf zu kommen; besonders, wenn Umstände ihnen dergleichen Untersuchungen nöthig machen.

selben Gliedern als der zweite besteht, so muß man, nachdem die angezeigten Multiplicationen wirklich verrichtet worden sind, die Coefficienten, welche jede Potenz von x in beiden Gleichungen enthält, einander gleich setzen, und man wird hieraus folgende Gleichungen erhalten:

$$P+p'=P'+p \qquad Rp'+Qq'+Pr'=S'+R'q+Q'q$$
$$Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q \qquad Rq'+Qr'=S'p+R'q$$
$$R+Qp'+Pq'+r'=R'+Q'p+P'q \qquad Rr'=S'q.$$

Da nun die Anzahl dieser Gleichungen sechs ist und nur fünf unbekannte Größen, nämlich p, q, p', q' und r' darin vorkommen, so kann man diese Größen, welche nur vom ersten Grade sind, fortschaffen, wodurch man zuletzt zu einer Gleichung gelangt, welche nur noch die Größen P, Q, R, P', Q', R' und S' enthält, und folglich die Endgleichung in y sein wird *).

---

*) Die hier auseinandergesetzte Eulersche Methode kommt darauf hinaus, jede der vorgelegten Gleichungen durch einen Factor, dessen Coefficienten unbestimmt sind, zu multipliciren, dann diese Producte unter einander zu vergleichen und die Coefficienten dergestalt anzunehmen, daß die mit der unbekannten Größe x behafteten Glieder sich gegen einander aufheben. Auf diese Art stellt er sie in seiner Einleitung zur Analysis des Unendlichen vor. Daselbst bezeichnet k den Exponenten des Grades der Producte, wo also derjenige der Factoren, durch welchen die Gleichung vom Grade m multiplicirt wird, vom Grade $k-m$, und derjenige, durch welchen die Gleichung vom Grade n multiplicirt wird, vom Grade $k-n$ sein wird. Da nun das erste Glied eines jeden dieser Factoren die Einheit zum Coefficienten hat, so wird der eine $k-m$ und der andere $k-n$ unbestimmte Coefficienten enthalten. Die Summe der Producte der mit x behafteten Glieder ist k, allein man braucht nur noch $k-1$ derselben verschwinden zu lassen, weil das, welches die höchste Potenz von x enthält, von selbst verschwindet. Hieraus folgt, daß die ganze Anzahl $2k-m-n$ der unbestimmten Coefficienten gleich $k-1$ sein muß, und daß folglich $k=m+n-1$. Man muß also die Gleichung vom Grade m mit einem Factor vom Grade $n-1$, die Gleichung vom Grade n mit einem Factor vom Grade $m-1$ multipliciren, und die Producte Glied für Glied einander gleich setzen, eine Regel, welche der im Texte gegebenen völlig ähnlich ist. Es ist wohl zu merken, daß diese erste Methode von Euler der Inbegriff derjenigen ist, welche Bezout in seiner *Théorie des Equations algébriques* auf eine so weitläuftige und beschwerliche Art auseinandersetzt.

Wenn diese Gleichung sich identisch fände, so würde daraus folgen, daß die vorgelegten Gleichungen wenigstens einen Factor von der Form $x - \alpha$ hätten, was auch y sein mag; und wenn im Gegentheile die Endgleichung nur bekannte Größen enthielte, so würden die vorgelegten Gleichungen widersprechend sein.

Wenn die Endgleichung Statt finden kann, so erhält man den Factor $x - \alpha$, wenn man die ersten der vorgelegten Gleichungen durch das Polynom $x^2 + px + q$ dividirt; man findet als Quotient

$$x + P - p,$$

und vernachläßiget den Rest, weil er nothwendig Null sein muß, wenn man darin statt y einen aus der Endgleichung gezogenen Werth setzt. Setzen wir den obigen Quotienten gleich Null, so zieht man daraus

$$x = p - P,$$

und dieser Werth von x wird bekannt oder wenigstens in y ausgedrückt sein, wenn man darin p durch ihren aus den oben gebildeten Gleichungen vom ersten Grade abgeleiteten Werth ersetzt.

Derselbe Ausdruck wird im Allgemeinen eine Bruchform annehmen, dergestalt, daß man $x = \frac{M}{N}$ oder $Nx - M = 0$ haben wird, und man sieht alsdann, daß die Werthe von y, die gleichzeitig M und N verschwinden machen würden, die vorhergehende Gleichung, unabhängig von x, bestätigen würden; dieses würde daher kommen, weil durch diese Werthe die zwei vorgegebenen Gleichungen einen gemeinschaftlichen Factor von einem höhern Grade als der erste erlangen würden. Es wäre nicht schwer, bis zu den unmittelbaren Bedingungen zurück zu gehen, welche diese Umstände anzeigen; allein dergleichen Details überschreiten die Grenzen, die ich mir in diesen Anfangsgründen vorgeschrieben habe.

§. 194.

Es seien z. B. zuerst die Gleichungen

$$x^2 + Px + Q = 0, \qquad x^2 + P'x + Q' = 0;$$

die Factoren, welche $x - \alpha$ multipliciren, sind hier vom ersten Grade oder bloß $x+p$ und $x+p'$; man wird also haben

$$R=0,\ R'=0,\ S'=0,\ q=0,\ q'=0,\ r'=0,$$

und es wird kommen

$$\left.\begin{aligned} P+p' &= P'+p \\ Q+Pp' &= Q'+P'p \\ Qp' &= Q'p \end{aligned}\right\} \text{ oder } \begin{cases} p-p' = P-P' \\ P'p-Pp' = Q-Q' \\ Q'p-Qp' = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen zieht man

$$p = \frac{(P-P')P-(Q-Q')}{P-P'};$$

$$p' = \frac{(P-P')P'-(Q-Q')}{P-P'}.$$

Substituirt man diese in der dritten, so folgt daraus

$$(P-P')Q'P-(Q-Q')Q' = (P-P')P'Q-(Q-Q')Q$$

oder $$(P-P')(PQ'-QP') + (Q-Q')^2 = 0.$$

Wenn man jetzt in der Gleichung

$$x = p - P$$

den für p vorhin gefundenen Werth nimmt, so wird daraus erfolgen

$$x = -\frac{Q-Q'}{P-P'}.$$

§. 195.

Um dem Leser Gelegenheit zu geben, sich hierin zu üben, wollen wir die Rechnung hersetzen, die man anwenden muß, um in den beiden Gleichungen x zu eliminiren.

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0, \quad x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0.$$

In diesem Fall ist

$$S' = 0, \quad r' = 0 \text{ (§. 193)},$$

und man wird diese fünf Gleichungen erhalten:

$$P + p' = P' + p,$$
$$Q + Pp' + q' = Q' + P'p + q,$$
$$R + Qp' + Pq' = R' + Q'p + P'q,$$
$$Rp' + Qq' = R'p + Q'q,$$
$$Rq' = R'q,$$

welchen man folgende Form geben kann:

$$p - p' = P - P',$$
$$P'p - Pp' + q - q' = Q - Q',$$
$$Q'p - Qp' + P'q - Pq' = R - R',$$
$$R'p - Rp' + Q'q - Qq' = 0,$$
$$R'q - Rq' = 0.$$

Man könnte durch die Regeln in §. 88 unmittelbar aus einer beliebigen von diesen Gleichungen die Werthe der unbekannten p, p', q und q' ziehen; aber die Einfachheit der erstern und der letztern dieser nämlichen Gleichungen erlaubt, viel schneller zum Resultat zu kommen. Ich mache, um abzukürzen

$$P - P' = e, \quad Q - Q' = e', \quad R - R' = e'';$$

und leite nachgehends aus der ersten und aus der zweiten der vorgelegten Gleichungen ab:

$$p' = p - e, \quad q' = \frac{R'q}{R};$$

wenn wir nun in den drei letztern substituiren und den Nenner R wegschaffen, so kommt

$$(P' - P)\,Rp + (R - R')\,q = R(e' - Pe) \ldots (a),$$
$$(Q' - Q)\,Rp + (RP' - PR')\,q = R(e'' - Qe) \ldots (b),$$
$$(R' - R)\,Rp + (RQ' - QR')\,q = -R^2 e \ldots\ldots (c).$$

Zieht man jetzt aus den Gleichungen (a) und (b) die Werthe von p und q (§. 88) und läßt den Factor R weg, der dem Zähler und Nenner gemein ist, so wird man haben

$$p = \frac{(e' - Pe)(RP' - PR') - (R - R')(e'' - Qe)}{(P' - P)(RP' - PR') - (R - R')(Q' - Q)};$$

$$q = \frac{(P' - P)(e'' - Qe)R - R(e' - Pe)(Q' - Q)}{(P' - P)(RP' - PR') - (R - R')(Q' - Q)}.$$

Setzt

Setzt man die Werthe in die Gleichung (c), so wird man eine durch R theilbare Endgleichung erhalten, die sich reducirt zu

$$(R'-R)[(e'-Pe)(RP'-PR')-R-R')(e'\quad Qe)]$$
$$+(RQ'-QR')[(P'-P)(e''-Qe)-(e'-Pe)(Q'-Q)]$$
$$=-Re[(P'-P)(RP'-PR')-(R-R')(Q'-Q)],$$

wo nichts weiter zu thun übrig bleibt als nur die Buchstaben e, e', e'' durch die Größen, welche sie bezeichnen, auszudrücken.

§. 196.

Wenn man zwischen dreien unbekannten Größen x, y und z eine gleiche Anzahl durch (1), (2) und (3) bezeichnete Gleichungen hätte und daraus diese unbekannte Größen bestimmen wollte, so könnte man zuerst z. B. die Gleichung (1) mit (2) und (3) combiniren, um x zu eliminiren, und dann aus den beiden Resultaten, welche man erhalten würde, y herausschaffen; man muß aber hiebei bemerken, daß die drei vorgelegten Gleichungen bei dieser nach einander verrichteten Elimination nicht alle auf einerlei Art zur Bildung der Endgleichung beitragen; so ist die Gleichung (1) zweimal angebracht, da indessen die Gleichungen (2) und (3) es nur einmal sind, woher es auch rührt, daß das Resultat, zu welchem man gelangt, einen Factor zu viel enthält in der Aufgabe §. 84. Bezout hat in seiner *Théorie des Equations* eine Methode gebraucht, welche dieser Inconvenienz nicht unterworfen ist, und wodurch er beweist, daß der Grad der Endgleichung, welche aus der Elimination irgend einer Anzahl vollständiger Gleichungen, die eine Anzahl unbekannter Zahlen von demselben Grad enthalten, entspringt, dem Producte der Exponenten dieser Gleichungen gleich sein müsse. Man wird in dem Complement zu diesen Anfangsgründen den eleganten und kurzen Beweis finden, den Poisson von diesem Satze gegeben hat, welcher übrigens leicht bei den in §. 194 und 195 beigebrachten Endgleichungen geprüft werden kann. Wenn man

die in diesen §§. vorgegebenen Gleichungen als vollständig annimmt, so erscheint y in P und P' auf dem ersten Grade, in Q und Q' auf dem zweiten, in R und R' auf dem dritten; hieraus folgt, daß e vom ersten Grade, e' vom zweiten, e'' vom dritten sein wird und daß die Glieder vom höchsten Grade der in der Endgleichung (§. 194) angezeigten Producte zum Exponenten 4 oder 2.2 und die der Endgleichung (§. 195) 9 oder 3.3 haben werden.

Vom Aufsuchen der commensurabeln Wurzeln und von den gleichen Wurzeln der numerischen Gleichungen.

§. 197.

Nachdem wir die vorzüglichsten Eigenschaften der algebraischen Gleichungen der Art, wie man, wenn mehrere unbekannte Größen darin vorkommen, diese eliminiren könne, gezeigt haben, wollen wir uns mit der Zahlenauflösung der Gleichungen mit einer einzigen unbekannten Größe beschäftigen, das heißt, mit der Aufsuchung ihrer Wurzeln, wenn ihre Coefficienten in Zahlen gegeben sind *).

Wir wollen zuerst zeigen, daß jede Gleichung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, deren erstes Glied die Einheit zum Coefficienten hat, und welche keine ganze Zahl zur Wurzel hat, auch keine durch einen Bruch genau ausgedrückte Wurzel haben kann, sondern diese letzteren werden incommensurabel sein.

Um dieses zu beweisen, sei die Gleichung

---

*) Für Gleichungen vom höhern Grade als vom vierten giebt es keine allgemeine Auflösungen; es giebt, eigentlich zu reden, nur für die Gleichungen vom zweiten Grade Auflösungen, welche man als vollständig betrachten kann. Die Ausdrücke für die Wurzeln vom dritten und vierten Grade sind sehr verwickelt, Ausnahmen unterworfen und in der Ausübung weit unbequemer als die, welche wir eben geben wollen. Sie sollen indessen im Complemente (Bd. II. dieser Anfangsgründe) gezeigt werden.

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

in welche man ſtatt x einen Bruch $\frac{a}{b}$, welcher auf ſeine kleinſte Form gebracht iſt, ſubſtituirt, ſo wird ſie

$$\frac{a^n}{b^n} + P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} \ldots\ldots + T\frac{a}{b} + U = 0,$$

und bringt man nun alle Glieder auf gleiche Benennung, ſo wird man haben

$$a^n + Pa^{n-1}b + Qa^{n-2}b^2 \ldots\ldots + Tab^{n-1} + Ub^n = 0,$$

welches ſich zurückführen läßt auf

$$a^n + b(Pa^{n-1} + Qa^{n-2}b \ldots\ldots + Tab^{n-2} + Ub^{n-1}) = 0.$$

Der erſte Theil der letzten Gleichung iſt alſo aus zweien Theilen zuſammengeſetzt, von denen der eine durch b theilbar und der andere es nicht iſt (§. 98), weil, nach der Annahme, der Bruch $\frac{a}{b}$ auf ſeine kleinſte Form gebracht iſt, oder, weil a und b keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben; es kann daher der eine dieſer Theile den andern nicht vernichten.

§. 198.

Nach dieſer Bemerkung ſieht man leicht ein, wie nützlich es ſei, die Brüche aus einer Gleichung hinwegzuſchaffen oder ganze Coefficienten zu erhalten zu ſuchen, jedoch muß dieſes dergeſtalt geſchehen, daß das erſte Glied nur die Einheit enthält, und hierzu gelangt man, **indem man zuerſt ſtatt der unbekannten Größe eine neue unbekannte beſtimmt, welche das Product aller Nenner zum Diviſor hat,** und nachher alle Glieder durch den nämlichen Nenner nach dem Verfahren des §. 52. verändert.

Es ſei z. B. die Gleichung

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0;$$

ſo würde ich ſetzen $x = \frac{y}{mnp}$, und dieſer Werth, in der vorgelegten Gleichung ſtatt x ſubſtituirt, giebt

$$\frac{y^3}{m^3 n^3 p^3} + \frac{a y^2}{m^3 n^2 p^2} + \frac{b y}{m n^2 p} + \frac{c}{p} = 0.$$

Der Divisor des ersten Gliedes enthält alle Factoren der andern Divisoren; multiplicirt man nun alle Glieder durch diesen Divisor und bringt sie auf ihren einfachsten Ausdruck, so findet man alsdann:

$$y^3 + anpy^2 + bm^2np^2y + cm^3n^3p^2 = 0.$$

Wenn die Nenner m, n, p einen oder etliche gemeinschaftliche Divisoren haben, so nimmt man zum Divisor bei y nur den möglich kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. Diese Vereinfachungen sind viel zu leicht wahrzunehmen, als daß es Bedürfniß sein sollte, sich hierbei aufzuhalten; ich werde mich begnügen, nur zu bemerken, daß wenn alle Nenner gleich m wären, so reichte es hin, $x = \frac{y}{m}$ zu machen.

Die vorgelegte Gleichung wird alsdann sein

$$x^3 + \frac{a x^2}{m} + \frac{b x}{m} + \frac{c}{m} = 0$$

wird zurückgebracht werden auf

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{a y^2}{m^3} + \frac{b y}{m^2} + \frac{c}{m} = 0,$$

und man wird haben

$$y^3 + ay^2 + bmy + m^2 c = 0.$$

Diese Operation kommt offenbar darauf zurück, alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung durch m zu multipliciren, weil aus $x = \frac{y}{m}$, $y = mx$ folgt.

§. 199.

Wenn a eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

so hat man

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta \text{ (§. 179)},$$

woraus folgt, daß a nothwendigerweise ein Divisor der ganzen Zahl U sein muß, und daß man folglich, wenn diese

Zahl wenig Divisoren hat, bloß jeden dieser Factoren statt x in die vorgelegte Gleichung zu substituiren braucht, um zu erfahren, ob sie eine Wurzel in ganzen Zahlen habe oder nicht.

Wenn man z. B. diese Gleichung hätte

$$x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0,$$

so würde man, da die Zahl 38 nicht mehr als diese Factoren hat

$$1, \quad 2, \quad 19, \quad 38,$$

mit jedem, sowohl positiv als negativ genommen, probiren, und es würde sich dann finden, daß die einzige ganze Zahl $+2$ der vorgelegten Gleichung ein Genüge thut, oder daß $x=2$. Man würde dann die vorgelegte Gleichung durch $x-2$ dividiren; und wenn man den Quotienten gleich Null setzt, so entsteht folgende Gleichung:

$$x^2 - 4x + 19 = 0,$$

deren Wurzeln imaginair sind; wenn man sie auflöst, so ergiebt sich, daß die vorgelegte Gleichung folgende drei Wurzeln zuläßt:

$$x = 2, \quad x = 2 + \sqrt{-15}, \quad x = 2 - \sqrt{-15}.$$

§. 200.

Das Verfahren, welches wir so eben zur Entdeckung der ganzen Zahlen, welche einer Gleichung ein Genüge thun, gezeigt haben, wird unbrauchbar, wenn das letzte Glied dieser Gleichung viel Factoren hat, indessen lassen sich aus der Gleichung

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta$$

neue Bedingungen herleiten, welche den Calcul sehr abkürzen. Um die Methode recht anschaulich zu machen, wollen wir ein Beispiel nehmen, nämlich die Gleichung

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0;$$

wenn nun a immer die Wurzel bezeichnet, so wird man haben

$$a^4 + Pa^3 + Qa^2 + Ra + S = 0,$$

$$S = -Ra - Qa^2 - Pa^3 - a^4,$$

woraus man zieht

$$\frac{S}{a} = -R - Qa - Pa^2 - a^3.$$

Man sieht zuvörderst, daß in dieser letzten Gleichung $\frac{S}{a}$ eine ganze Zahl sein muß.

Bringt man nun R in den andern Theil, so erhält man

$$\frac{S}{a} + R = -Qa - Pa^2 - a^3;$$

setzt man der Abkürzung wegen $\frac{S}{a} + R = R'$ und dividirt beide Theile der Gleichung

$$R' = -Qa - Pa^2 - a^3$$

durch a, so wird man haben

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2,$$

woraus man schließen kann, daß $\frac{R'}{a}$ noch eine ganze Zahl sein muß.

Bringt man ferner Q in den ersten Theil und setzt.... $\frac{R'}{a} + Q = Q'$, so wird man, wenn beide Theile durch a dividirt werden,

$$\frac{Q'}{a} = -P - a$$

erhalten, woraus sich ebenfalls ergiebt, daß $\frac{Q'}{a}$ eine ganze Zahl sein muß.

Bringt man endlich P in den ersten Theil und setzt $\frac{Q'}{a} + P = P'$, so wird man, wenn man durch a dividirt, erhalten.

$$\frac{P'}{a} = -1.$$

Nimmt man nun die eben vorgetragenen Bedingungen zusammen, so wird man sehen, daß die Zahl a eine Wurzel der vorgelegten Gleichung sein würde, wenn sie folgenden Gleichungen

$$\frac{S}{a} + R = R',$$

$$\frac{R'}{a} + Q = Q',$$

$$\frac{Q'}{a} + P = P'$$

$$\frac{P'}{a} + 1 = 0,$$

dergestalt ein Genüge leistet, daß R', Q' und P' ganze Zahlen werden.

Hieraus folgt, daß man, um zu untersuchen, ob einer der Divisoren a des letzten Gliedes S eine Wurzel der vorgelegten Gleichung sein könne,

1) das letzte Glied durch diesen Factor dividiren und zum Quotienten den Coefficienten des mit x behafteten Gliedes hinzusetzen müsse;

2) muß man diese Summe durch den Divisor a dividiren und zum Quotienten den Coefficienten des mit x^2 behafteten Gliedes hinzusetzen;

3) dividire man diese Summe durch den Divisor a und setze zum Quotienten den Coefficienten des mit x^3 behafteten Gliedes;

4) muß man diese Summe durch den Divisor a dividiren und zum Quotienten die Einheit oder den Coeficienten von x^4 hinzusetzen; das Resultat muß gleich Null werden, wenn a wirklich eine Wurzel ist. Die her gegebenen Regeln sind auf jeden beliebigen Grad anwendbar, wenn man nur bemerkt, daß man nicht eher Null zum Resultat finden darf, als bis man zum ersten Gliede der vorgelegten Gleichung gelangt ist *).

---

*) Es wird nicht schwer fallen, sich durch die im §. 180 für die Quotienten gegebenen Formeln zu überzeugen, daß die Größen $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$, mit dem Zeichen — genommen, die Coefficienten des Quotienten das Polynom von $x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$ durch $x - a$ dividirt sein müssen, welches folglich giebt

$$x^3 - \frac{Q'x^2}{a} - \frac{R'x}{a} - \frac{S}{a}.$$

§. 201.

Wenn man diese Regeln auf ein Zahlenbeispiel anwendet, so kann die Rechnung dergestalt angeordnet werden, daß man mit allen Divisoren die letzten Glieder zu gleicher Zeit probirt.

So ist für die Gleichung

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

die Rechnungstabelle folgende:

+ 15,	+ 5,	+ 3,	+ 1,	— 1,	— 3,	— 5,	— 15
+ 1,	+ 3,	+ 5,	+ 15,	— 15,	— 5,	— 3,	— 1,
— 19,	— 17,	— 15,	— 5,	— 35,	— 25,	— 23,	— 21,
		— 5,	— 5,	+ 35,			
		+ 18,	+ 18,	+ 58,			
		+ 6,	+ 18,	— 58,			
		— 3,	+ 9,	— 67,			
		— 1,	+ 9,	+ 67,			
		0.					

Alle Divisoren des letzten Gliedes 15 sind der Grösse nach sowohl mit dem Zeichen + als mit dem Zeichen — in einer horizontalen Linie geordnet (das ist die Linie der Divisoren a).

Die zweite Linie enthält die Quotienten der Zahl 15, durch jeden ihrer Divisoren nach einander dividirt (dies ist die Linie für die Grösen $\frac{S}{a}$).

Die dritte Linie entsteht, indem man zur vorhergehenden den Coefficienten — 20, welcher x multiplicirt, hinzusetzt (das ist die Linie für die Grösen $R = \frac{S}{a} + R$)

Die vierte Linie enthält die Quotienten jder der vorhergehenden Zahlen durch den ihr correspondirenden Divisor dividirt (das ist die Linie für die Grösse $\frac{R'}{a'}$). Man hat in dieser Zeile alle Zahlen, welche keine Ganze sind, ausgelassen.

Die fünfte Linie entsteht, wenn man zu jeder Zahl der vorhergehenden die Zahl 23, welche x^2 multiplicirt, hinzusetzt (dieses ist die Linie, welche die Größen Q' begreift).

Die sechste Linie enthält die Quotienten der vorhergehenden Zahlen durch den ihnen correspondirenden Divisor dividirt $\left(\text{sie enthält die Größen } \frac{Q'}{a}\right)$.

Die siebente Linie begreift die Summe der vorhergehenden Zahlen mit dem Coefficienten — 9, welcher x^3 multiplicirt, zusammen genommen (man findet also darin die Größen $\frac{Q'}{a} + P$).

Die achte Linie endlich wird erhalten, wenn man jede der Zahlen der vorhergehenden Linie durch den correspondirenden Divisor dividirt $\left(\text{das ist die Linie für die Werthe } \frac{P}{a}\right)$; und da man nur unter der durch + 3 angezeigten Columne — 1 findet, so kann man hieraus schließen, daß die vorgelegte Gleichung nur eine commensurable Wurzel, nämlich + 3 hat, so daß sie durch $x - 3$ theilbar sein wird *).

Man könnte in der Tabelle die Werthe für + 1 und — 1 auslassen, weil man diese durch die unmittelbare Substitution in der vorgelegten Gleichung weit leichter probiren kann.

§. 202.

Es sei noch als ein Beispiel gegeben die Gleichung

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0.$$

Nachdem man sich überzeugt hat, daß die Werthe + 1 und — 1 diese Gleichung nicht auflösen, könnte man nach den vorhergehenden Regeln untenstehende Tabelle bilden, nachdem wir bemerken, daß das mit x multiplicirte Glied in die-

---

*) Wenn man den Quotienten nach der vorhergehenden Anmerkung bildet, erhält man

$$x^3 - 6x^2 + 5x - 5.$$

ser Gleichung steht, daher wir uns den Coefficienten als Null vorstellen müssen; man muß daher die dritte Linie auslassen und die vierte unmittelbar aus der zweiten herleiten.

+36, +18, +12, +9, +6, +4, + 3, + 2, — 2, — 3, —4, —6, —9, —12, —18, —36
+ 1, + 2, + 3, +4, +6, +9, +12, +18, —18, —12, —9, —6, —4, — 3, — 2, — 1
****

+ 1,	+ 4,	+ 9,	+ 9,	+ 4,	+ 1
— 6,	— 3,	+ 2,	+ 2,	— 3,	— 6
— 1,	— 1,	— 1,	+ 1,		+ 1
0,	0,		0.		

Man findet in diesem Beispiel drei Zahlen, welche allen Bedingungen ein Genüge thun, und diese sind: $+6$, $+3$ und -2. Man erhält also zugleich die drei Wurzeln, deren die vorgelegte Gleichung fähig ist, und man sieht also, daß sie ein Product aus den drei einfachen Factoren $x-6$, $x-3$ und $x+2$ ist.

§. 203.

Es ist gut, zu bemerken, daß es Buchstabengleichungen giebt, welche sich unmittelbar in Zahlengleichungen verwandeln lassen..

Wenn man z. B.

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0$$

hätte, so würde, wenn man $y = px$ setzte, kommen

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = 0,$$

ein Resultat, welches durch p^3 theilbar ist und sich auf

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0$$

reducirt.

Da nun der commensurable Divisor dieser letzten Gleichung $x+7$ ist, so erhält man, wenn $x = -7$ gesetzt wird,

$$y = -7p.$$

Die Gleichung in y ist von derjenigen Gattung, welche man **homogene Gleichungen** nennt, weil, wenn man die

Zahlencoefficienten nicht mitrechnet, jedes ihrer Glieder einerlei Anzahl Factoren enthält *).

§. 204.

Wenn man eine der Wurzeln der vorgelegten Gleichung kennt, kann man die Differenz dieser Wurzel und einer der übrigen für die unbekannte Größe nehmen; man erhält durch dieses Mittel eine Gleichung, welche um einen Grad niedriger als die vorgelegte ist, und gelangt dadurch zur Entdeckung mehrerer merkwürdigen Eigenschaften.

Es sei die allgemeine Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0,$$

und die Wurzeln dieser Gleichungen seien a, b, c, d u. s. w.; substituirt man nun statt x, $a+y$ und entwickelt die Potenzen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} a^m + ma^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 + \ldots + y^m \\ +Pa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2}y + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^3 + \ldots \\ +Qa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}y + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2 + \ldots \\ +Ra^{m-3} + (m-3)Ra^{m-4}y + \frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +Ta + Ty \\ +U; \end{array}\right\} = 0,$$

ein Resultat, dessen erste Columne, indem sie der vorgelegten Gleichung völlig ähnlich ist, von selbst verschwindet, weil nach der Voraussetzung a eine der Wurzeln dieser Gleichung ist; man kann also diese Columne gänzlich auslassen, und dann

---

*) Die Leser, welche mehr Auseinandersetzung über die Untersuchung der commensurablen Divisoren wünschen, finden solche im 3ten Theile der Anfangsgründe der Algebra von Clairaut. Dieser Geometer hat sich sowohl mit den Buchstaben- als mit den Zahlengleichungen beschäftigt.

alle übrigen Glieder durch y dividiren; es wird alsdann kommen:

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}y + \ldots + y^{m-1} \\ +(m-1)Pa^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Pa^{m-3}y + \ldots \\ +(m-2)Qa^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} Qa^{m-4}y + \ldots \\ +(m-3)Ra^{m-4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2} Ra^{m-5}y + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +T \end{array}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird offenbar zu ihren $m-1$ Wurzeln haben

$$y = b - a, \quad y = c - a, \quad y = d - a \quad \text{u. s. w.}$$

Wir wollen diese durch

$$A + \frac{B}{2}y + \frac{C}{2.3}y^2 \ldots\ldots + y^{m-1} = 0 \ldots\ldots\ldots (d)$$

vorstellen, indem wir zur Abkürzung

$$ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3} \ldots + T = A,$$
$$m(m-1)a^{m-2} + (m-1)(m-2)Pa^{m-3} \ldots = B$$

u. s. w.

setzen; und durch V wollen wir den Ausdruck

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + Ta + U$$

bezeichnen.

§. 205.

Wenn nun die vorgelegte Gleichung zwei gleiche Wurzeln hätte, z. B. $a = b$ wäre, so würde einer der Werthe von y, nämlich $b - a$ Null werden; es muß also in diesem Fall der Gleichung (d) ein Genüge geschehen, wenn man darin $y = 0$ setzt; da nun bei dieser Annahme alle Glieder bis auf das völlig bekannte A verschwinden, so muß dieses letztere an und für sich Null sein; der Werth von a muß also zu gleicher Zeit den beiden Gleichungen

$$V = 0 \quad \text{und} \quad A = 0$$

ein Genüge thun.

Wenn die vorgelegte Gleichung drei gleiche Wurzeln, nämlich $a=b=c$ hätte, so würden zwei Wurzeln der Gleichung (d) zu gleicher Zeit Null werden, nämlich $b-a$ und $c-a$; in diesem Falle wird die Gleichung (d) zweimal nach einander durch $y=0$ oder y theilbar sein (§. 179); und da dieses nicht anders geschehen kann, als wenn die Coefficienten A und B Null sind, so muß der Werth von a zu gleicher Zeit den dreien Gleichungen

$$V=0, \quad A=0, \quad B=0$$

ein Genüge thun.

Wenn man diese Schlüsse verfolgt, so wird sich ergeben, daß, wenn die vorgelegte Gleichung vier Wurzeln hätte, die Gleichung (d) drei Wurzeln gleich Null haben oder dreimal nach einander durch y theilbar sein wird, welches erfordert, daß die Coefficienten A, B und C zu gleicher Zeit Null werden, und daß folglich der Werth a allemal den vier Gleichungen

$$V=0, \quad A=0, \quad B=0, \quad C=0$$

ein Genüge leiste.

Man kann vermöge dieser Untersuchung nicht nur erkennen, ob eine bekannte Wurzel a in einer vorgegebenen Gleichung mehrmal vorhanden ist; sondern man leitet auch daraus noch ein Verfahren ab, um sich zu versichern, ob diese Gleichung mehrere gleiche Wurzeln hat, deren Werth man nicht kennt.

Zu diesem Zwecke ist es nöthig, zu bemerken, daß in dem Falle, wo man $A=0$ oder

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots+T=0$$

hat, man a als die Wurzel der Gleichung

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=0$$

ansehen kann; x stellt alsdann jede beliebige Größe vor; und weil a sich auch als Wurzel der Gleichung $V=0$ oder

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots \text{ u. s. w.}=0$$

findet, so folgt aus §. 189, daß $x-a$ ein gemeinschaftlicher Factor der beiden obigen Gleichungen ist.

Setzen wir aber x statt a in den Größen B, C u. s. w., so wird gleichfalls das Binom $x - a$ Factor der neuen Gleichungen $B = o$, $C = o$ u. s. w., wenn die Wurzel a die ursprünglichen Größen B, C u. s. w. annullirt. Das, was wir so eben von der Wurzel a gesagt haben, läßt sich vollkommen von jeder andern Wurzel, die mehreremal vorkommen kann, sagen; sucht man also, nach der Methode des größten gemeinschaftlichen Theilers, die der Gleichungen

$$V = o, \quad A = o, \quad B = o, \quad C = o \quad \text{u. s. w.},$$

so werden diese Factoren die gleichen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung in folgender Ordnung geben.

Die gemeinschaftlichen Factoren bei den beiden erstern Gleichungen sind doppelte der vorgelegten, d. h. wenn man zwischen $V = o$ und $A = o$ als gemeinschaftlichen Divisor einen Ausdruck etwa von der Form $(x - \alpha)(x - \beta)$ findet, so wird die unbekannte x zwei gleiche Werthe α und zwei gleiche Werthe β haben, oder die vorgelegte Gleichung wird die vier Factoren

$$(x - \alpha), \quad (x - \alpha), \quad (x - \beta), \quad (x - \beta)$$

haben.

Die den obigen dreien Gleichungen gemeinschaftlichen Factoren werden in der vorgelegten dreimal als Factoren anzutreffen sein, das heißt, wenn z. B. die erstern von der Form $(x - \alpha)(x - \beta)$ sind, so werden sie in der vorgelegten folgende Form haben: $(x - \alpha)^3 (x - \beta)^3$. Es ist leicht, diese Betrachtungen so weit, als man will, zu treiben.

§. 206.

Wir wollen noch bemerken, daß die Gleichung $A = o$, welche durch die Verwandlung von a und x in folgende verwandelt wird

$$m x^{m-1} + (m - 1) P x^{m-2}) (m-2) Q x^{m-3} \ldots + T = o,$$

unmittelbar aus der Gleichung $V = o$ oder aus der vorgelegten

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0$$

hergeleitet werden kann, wenn man jedes der Glieder dieser letztern durch den Exponenten derjenigen Potenz von x, welche es enthält, multiplicirt und dann den Exponenten um eine Einheit vermindert, wobei aber zu merken, daß das Glied U, indem es mit $U \times x^0$ einerlei ist, in dieser Operation wegfallen wird, weil es mit o multiplicirt werden muß. Die Gleichung $B = o$ läßt sich aus der Gleichung $A = o$ auf eben die Art herleiten, wie $A = o$ aus $V = o$ hergeleitet wird; $C = o$ wird eben so aus $B = o$ gefunden, wie diese aus $A = o$ gefunden wird, und so fort *).

§. 207.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Gleichung nehmen

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0;$$

die Gleichung $A = o$ wird in diesem Fall

$$5x^4 - 52x^3 + 201x^2 - 342x + 216 = 0;$$

ihr gemeinschaftlicher Theiler mit der vorgelegten ist

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18.$$

Dieser Divisor muß, indem er vom dritten Grade ist, an und für sich mehrere Factoren enthalten; man muß daher untersuchen, ob er nicht mit der Gleichung $B = o$ einen gemeinschaftlichen Factor habe, welcher hier

$$20x^3 - 156x^2 + 402x - 342 = 0$$

ist, und man findet wirklich $x - 3$ zum Resultate, mithin hat die vorgelegte Gleichung drei Wurzeln gleich 3 oder enthält $(x-3)^3$ unter ihren Factoren. Dividirt man nun den ersten gemeinschaftlichen Theiler so viel mal als es angeht,

---

*) Man beweist sehr leicht von diesem Verfahren, daß der gemeinschaftliche Theiler der Gleichungen $V = 0$ und $A = 0$ dieselben Factoren, auf eine um einen Grad niedrigere Potenz erhoben, als in der vorgelegten, enthält; aber die Bekanntschaft dieses Satzes war nicht nothwendig für das, was hier folgt. Ich habe ihn daher für das Complement (Bd. II.) vorbehalten, wo er auf eine Art bewiesen werden kann, welche mir sehr einfach zu sein scheint.

nämlich zweimal nach einander durch $x-3$, so findet man $x-2$. Dieser Factor, welcher nur der vorgelegten Gleichung und der Gleichung $A=0$ gemein ist, kommt nur zweimal in der vorgelegten vor. Man sieht also endlich, daß diese Gleichung mit $(x-3)^3\ (x-2)^2 = 0$ von gleichem Werthe sein wird.

§. 208.

Da die Gleichung (*d*) die Differenzen zwischen der Wurzel *b* und jeder der andern giebt, wenn man darin *b* statt *a* setzt, die Differenzen zwischen der Wurzel *c* und jeder der übrigen, wenn man *c* statt *a* setzt u. s. w., und sie die Form durch diese verschiedenen Substitutionen nicht ändert und die nämlichen Coefficienten als die vorgegebenen beibehält; so kann sie dergestalt allgemein gemacht werden, daß sie alle Differenzen der Wurzeln zu zwei und zwei combinirt.. In dieser Hinsicht ist es hinreichend, vermittelst der Gleichung

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + Ta + U = 0$$

a daraus zu elimininiren; denn da das Resultat nur von den Coefficienten abhängt und darin keine Spur von der Würzel, welche man insbesondere betrachtet hat, anzutreffen ist, so wird es allen zukommen.

Es ist einleuchtend, daß die Endgleichung vom Grade $m(m-1)$ sein wird; denn ihre Wurzeln

$a-b$, $a-c$, $a-d$, u. s. w.,
$b-a$, $b-c$, $b-d$, u. s. w.,
$c-a$, $c-b$, $c-d$, u. s. w.

sind offenbar in eben der Anzahl als die Permutationen, welche man bilden kann, wenn man die *m* Buchstaben *a*, *b*, *c* u. s. w. zu zweien und zweien verbindet. Da ferner die Größen

$a-b$ und $b-a$, $a-c$ und $c-a$, $b-c$ und $c-b$ ꝛc.

nur in Ansehung der Zeichen verschieden sind, so werden von den Wurzeln, wenn man die Zeichen außer Acht läßt, immer

zwei

zwei und zwei derselben einander gleich sein; so daß man, wenn z. B. $y = \alpha$ wäre, auch zugleich $y = -\alpha$ haben würde. Es folgt hieraus, daß diese Gleichung nur solche Glieder enthalten kann, worin die unbekannte Größe, auf eine gerade Potenz erhoben, vorkommt; da die erste Seite derselben das Product von einer gewissen Anzahl Factoren des zweiten Grades giebt von der Form

$$y^2 - \alpha^2 = (y - x)(y + \alpha) \quad (\S.\ 184);$$

sie kann also nur von dieser Form sein:

$$y^{2n} + py^{2n-2} + qy^{2n-4} \ldots + ty^2 + u = 0.$$

Setzt man $y^2 = z$, so verwandelt sich diese in

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + tz + u = 0,$$

und die unbekannte z wird, indem sie das Quadrat von y ist, für ihre Werthe die Quadrate der Differenzen von den Wurzeln der vorgelegten Gleichung erhalten.

Es ist beiläufig zu merken, daß die Differenzen der reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung, da sie nothwendigerweise reell sind, auch positive Quadrate haben werden, und es muß daher die Gleichung in z nur positive Wurzeln haben, wenn die vorgelegte lauter reelle enthält.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

setzt man darin $x = a + y$, so wird man erhalten

$$\left.\begin{array}{r} a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 \\ -7a - 7y \\ +7 \end{array}\right\} = 0.$$

Wenn man nun die Glieder $a^3 - 7a + 7$, welche nach der vorgelegten Aufgabe zusammen genommen Null sind, ausläßt und den Rest durch y dividirt, so kommt

$$3a^2 + 3ay + y^2 - 7 = 0;$$

eliminirt man aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$a^3 - 7a + 7 = 0$$

die Größe a, so erhält man

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0;$$

und wenn man $z = y^2$ setzt, so kommt

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

§. 209.

Die Substitution von $a+y$ statt x in der Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots U = 0 \quad (\S. 204)$$

kann auch zuweilen gebraucht werden, um ein Glied dieser Gleichung verschwinden zu machen. Man ordne alsdann das Resultat nach den Potenzen von y, welche die Stelle der unbekannten x vertritt, und betrachte die Größe a als eine zweite unbekannte, welche man bestimmt, indem man den Coefficienten des Gliedes, welchen man hinwegschaffen will, gleich Null setzt; man hat auf diese Art

$$\left.\begin{array}{l} y^m + may^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2y^{m-2} \ldots + a^m \\ \quad + Py^{m-1} + (m-1)Pay^{m-2} \ldots + Pa^{m-1} \\ \qquad\quad + Qy^{m-2} \ldots + Qa^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + U \end{array}\right\} = 0.$$

Wenn das Glied, welches man hinwegschaffen will, das zweite oder das, welches y^{m-1} enthält, wäre, müßte man setzen $ma + P = 0$, woraus man zieht $a = -\frac{P}{m}$. Substituirt man nun diesen Werth in dem Resultate, so bleiben nur noch die mit y^m, y^{m-2}, y^{m-3} u. s. w. behafteten Glieder.

Es folgt hieraus, daß man das zweite Glied einer Gleichung hinwegschafft, wenn man statt der unbekannten Größe eine neue unbekannte substituirt, zu welcher man aber noch den Coefficienten des zweiten Gliedes, durch den Exponenten des ersten Gliedes dividirt, mit einem entgegengesetzten Zeichen hinzusetzen muß.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0;$$

die Regel giebt

$$x = y - \tfrac{6}{3} = y - 2,$$

und wenn man diesen substituirt, erhält man

$$\left.\begin{array}{rrrr} y^3 & - 6y^2 & + 12y & - 8 \\ + & 6y^2 & - 24y & + 24 \\ & & - 3y & + 6 \\ & & & + 4 \end{array}\right\} = 0,$$

welches sich auf

$$y^3 - 15y + 26 = 0$$

reducirt, wo das mit y^2 behaftete Glied nicht mehr anzutreffen ist. Man würde das dritte (mit y^{m-2} behaftete) Glied hinwegschaffen, wenn man die ganze Größe, welche dieses Glied multiplicirt, gleich Null setzen möchte, das ist, wenn man die Gleichung ansetzt,

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 + (m-1) Pa + Q = 0.$$

Wenn man diesen Weg verfolgt, wird man leicht sehen, daß das Hinwegschaffen des vierten Gliedes von einer Gleichung vom dritten Grade abhängen würde, und so bis zum letzten Gliede, welches man hinwegschaffen kann, wenn man diese Gleichung ansetzt:

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + U = 0,$$

welche der vorgelegten völlig ähnlich ist.

Die Ursach dieser Aehnlichkeit ist leicht einzusehen. Denn das letzte Glied der Gleichung y gleich Null setzen, heißt nichts anders, als einen der Werthe desselben gleich Null annehmen, und wenn man diese Hypothese in der Gleichung $x = y + a$ macht, so folgt $x = a$; das ist, die Größe a muß in diesem Falle nothwendigerweise einer der Werthe von x sein.

§. 210.

Es ist zuweilen erforderlich, eine Gleichung in Factoren von einem höhern Grade als vom ersten zu zerlegen; wir können hier nicht die verschiedenen Verfahrungsarten, welche

man in dieser Hinsicht anwenden muß, aus einander setzen, und wollen daher nur ein Beispiel von diesem Gegenstande anführen.

Es sei die Gleichung

$$x^3 - 24x^3 + 12x^2 - 11x + 7 = 0,$$

von welcher man die Factoren vom dritten Grade bestimmen will; wir wollen einen dieser Factoren durch

$$x^3 + px^2 + qx + r,$$

bezeichnen, wo die Coefficienten p, q und r unbestimmt sind. Indessen müssen sie von der Beschaffenheit sein, daß die erste Seite der vorgelegten Gleichung durch den Factor

$$x^3 + px^2 + qx + r$$

unabhängig von jedem besondern Werth von x, genau theilbar sei; wird nun diese Division verrichtet, so erhält man zum Rest

$$-(p^3 - 2pq - 24p + r - 12)x^2$$
$$-(p^2q - pr - q^2 - 24q + 11)x$$
$$-(p^2r - qr - 24r - 7);$$

da dieser Ausdruck unabhängig von x von selbst Null wird, wenn man darin statt der Buchstaben p, q und r, die dem Stand der Aufgabe angemessenen Werthe substituirt, so wird man dann haben

$$p^3 - 2pq - 24p + r - 12 = 0,$$
$$p^2q - pr - q^2 - 24q + 11 = 0,$$
$$p^2r - qr - 24r - 7 = 0.$$

Diese drei Gleichungen enthalten die zur Bestimmung der unbekannten p, q und r nothwendigen Bedingungen, und auf diese Auflösung läßt sich die vorgelegte Aufgabe zurückbringen.

Von der Auflösung der numerischen Gleichungen durch Näherung.

§. 211.

Nachdem wir die Untersuchung der commensurablen Theiler abgehandelt haben, wollen wir nun zur Approximationsmethode übergehen, welche auf folgenden Gründen beruht:

Wenn man zwei Größen gefunden hat, welche, statt der unbekannten Größe in einer Gleichung substituirt, zwei Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben, so kann man daraus schließen, daß eine der Wurzeln der vorgelegten Gleichung zwischen diesen beiden Größen enthalten und folglich reell sein werde.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0;$$

wenn man darin nach einander 2 und 20 statt x substituirt, so wird der erste Theil, anstatt sich auf Null, vielmehr im ersten Fall auf -31 und im zweiten auf $+2939$ reduciren, woraus man schließen kann, daß diese Gleichung eine reelle zwischen 2 und 20 enthaltene Wurzel hat, das heißt größer als 2 und kleiner als 20.

Da ich öfter genöthigt sein werde, diese Relation auszudrücken, so will ich die Zeichen $>$ und $<$ anwenden, deren sich die Algebraisten oft bedienen, um die Ungleichheit von zweien Größen anzuzeigen, indem man die größere von zwei Größen vor die Oeffnung des Zeichen, und die andere an die Spitze setzt.

Ich werde demzufolge schreiben

$x > 2$ für x größer denn 2,

$x < 20$ für x kleiner denn 20.

Dieses vorausgesetzt, muß man, um den vorhergehenden Satz zu beweisen, folgendermaßen schließen. Wenn man einerseits alle positiven Glieder der vorgelegten Gleichung und andererseits alle negativen derselben zusammen nimmt, so hat man

$$x^3 + 7x - (13x^2 + 1),$$

eine Größe, welche negativ wird, wenn man $x=2$ seßt, weil in diesem Falle

$$x^3 + 7x < 13x^2 + 1,$$

und sie findet sich positiv, wenn man $x=20$ annimmt, weil bei dieser Annahme

$$x^3 + 7x > 13x^2 + 1;$$

überdem ist sichtbar, daß die Größen

$$x^3 + 7x \quad \text{und} \quad 13x^2 + 1,$$

jede für sich, immer zunehmen, wenn man x immer größere und größere Werthe giebt, welche Werthe so nahe an einander als man will gewählt werden können, so daß man die vorgelegten Größen um so geringe Grade wachsen lassen kann, als man es irgend für dienlich erachtet. Da aber die erste der obigen Größen, welche vorher kleiner als die zweite war, nachher größer geworden ist, so ist offenbar, daß sie weit schneller anwächst als die andere, vermittelst welcher ihr gleichsam das ersetzt wird, um welches sie von dieser letztern vorher übertroffen wurde und sie endlich ganz übersteigt; es muß also einen Moment geben, worin diese beiden Größen einander gleich werden.

Der Werth von x, was er auch sein mag (da wir eben dessen Existenz bewiesen haben), welcher

$$x^2 + 7x = 13x^2 + 1$$

giebt, muß, da er auch

$$x^3 + 7x - (13x^2 + 1) = 0$$

oder $$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0,$$

nothwendigerweise eine Wurzel der vorgelegten Gleichung sein.

Was so eben von der besondern Gleichung

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0$$

gesagt worden ist, läßt sich auf jede Gleichung anwenden, deren positive Glieder wir durch P und deren negative Glieder wir durch N bezeichnen wollen. Es sei a der Werth von x, welcher ein negatives Resultat, und b derjenige, welcher

ein positives Resultat giebt; diese beiden Umstände können nicht Statt haben, wofern man nicht durch die erste Substitution $P < N$ und durch die andere $P > N$ erhalten hätte. Da nun P die Größe N überschritten hat, so kann man daraus, wie vorher, schließen, daß zwischen a und b ein Werth x liegen muß, welcher $P = N$ giebt *).

Das bisherige Raisonnement zeigt, daß man die Werthe, welche man x giebt, beide positiv oder beide negativ nehmen muß; denn wenn sie verschiedene Zeichen haben, so wird der, welcher negativ ist, die Zeichen aller derjenigen Glieder der vorgelegten Gleichung, welche lauter ungerade Potenzen von x enthalten, ändern, und folglich werden die Ausdrücke P und N in der einen Substitution nicht auf dieselbe Art wie in der andern zusammengesetzt sein. Diese Schwierigkeit wird gehoben, wenn man $x = 0$ setzt; denn hierdurch reducirt sich die vorgelegte Gleichung auf ihr letztes Glied, welches nothwendiger-

---

*) Die obigen Schlüsse, im Allgemeinen als evident genug betrachtet, haben durch Herrn Encontre nützliche Entwickelungen erhalten, die ich hier für diejenigen Leser, die mehr aus einander gesetzte Gründe wünschen möchten, beibringen will.

1) Von der Möglichkeit, den Polynomen P und N so kleine Zunahmen als man will, nehmen zu lassen, kann man sich so überführen. Es sei $P = \alpha x^m + \beta x^n \ldots + \delta x^q$, wo m der höchste Exponent von x ist; wenn man $a + y$ statt x setzt, so nimmt dieses Polynom die Form

$$A + By + Cy^2 \ldots + Ty^m,$$

wo die Coefficienten $A, B, C \ldots T$ in endlicher Anzahl und von endlichem Werthe sind; das erste Glied A wird der Werth sein, den das Polynom P annimmt, wenn $x = a$; der Rest

$$By + Cy^2 \ldots + Ty^m = y\,(B + Cy \ldots + Ty^{m-1})$$

wird die Größe sein, um welche das nämliche Polynom anwächst, wenn man den Werth $x = a$ um y vermehrt. Dieses vorausgesetzt wenn S den größten von den Coefficienten $B, C, \ldots T$ bezeichnet, so wird man haben

$$B + Cy \ldots + Ty^{m-1} < S\,(1 + y \ldots + y^{m-1});$$

es ist aber

$$1 + y \ldots + y^{m-1} = \frac{1 - y^m}{1 - y} \text{ (§. 158)};$$

mithin

$$y(B + Cy \ldots + Ty^{m-1}) < Sy\frac{(1 - y^m)}{1 - y},$$

weise entweder dem Resultat aus der ersten Substitution oder dem aus der zweiten entgegengesetzt sein muß. Es sei z. B. die Gleichung

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 15x - 3 = 0,$$

deren erster Theil, wenn man darin

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = 2$$

setzt, $+12$ und -45 wird. Setzt man nun $x = 0$, so reducirt er sich auf -3; die beiden Substitutionen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = -1$$

geben also zwei Resultate mit entgegengesetzten Zeichen; wenn man indessen $-y$ statt x setzt, so verwandelt sich die vorgelegte Gleichung in

$$y^4 + 2y^3 - 3y^2 + 15y - 3 = 0,$$

und man hat

$$P = y^4 + 2y^3 + 15y, \quad N = 3y^2 + 3,$$

woraus folgt

$$P < N, \text{ wenn } y = 0,$$
$$P > N, \text{ wenn } y = 1.$$

Man kann also im gegenwärtigen Fall wie im vorhergehen-

---

und folglich wird der Anwachs des Polynoms P kleiner als irgend eine gegebene Größe c sein, wenn $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$ kleiner als irgend eine gegebene Größe macht. Hierzu nun gelangt man, wenn man $\frac{Sy}{1-y} = c$ macht, denn alsdann, da $y = \frac{c}{S+c} < 1$ ist, wird die Größe $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$ gleich $\frac{Sy}{1-y} - \frac{Sy^{m+1}}{1-y}$ und also nothwendig kleiner als die Größe c sein, deren Kleinheit durch nichts beschränkt wird.

2) Bezeichnet man durch h den Zuwachs des Polynoms P, durch k den des Polynoms N, so wird die daraus in dem Werthe ihrer Differenz entstehende Veränderung sein $h - k$, und könnte kleiner als eine gegebene Größe gemacht werden, wenn man den größern Zuwachs von beiden kleiner als diese Größe macht. Man könnte also in dem Zwischenraume von $x = a$ zu $x = b$ die Differenz der Polynomen P und N durch beliebige kleine Größen sich ändern lassen; und weil sie in diesem Zwischenraum von negativ zu positiv übergehet, so nähert sie sich nothwendig der Null so nahe als man will. (Man sehe die *Annales des Mathématiques pures et appliquées* par M. *Gergonne*, T. IV. p. 210).

den schließen und daraus abnehmen, daß die Gleichung in y eine reelle zwischen 0 und $+1$ enthaltene Wurzel haben muß, woraus folgt, daß die der Gleichung in x zwischen 0 und -1 enthalten ist und folglich zwischen $+2$ und -1.

Da der eben vorgetragene Satz keine andere Fälle darbieten kann als solche, die in dem einen oder dem andern derjenigen begriffen sind, welche wir eben untersucht haben, so ist er hinreichend bewiesen.

§. 212.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir zeigen, daß man, **von welchem Grade auch die Gleichung und ihre Coefficienten sein mögen, immer eine Zahl angeben kann, welche, wenn man sie statt der unbekannten substituirt, das erste Glied größer als die Summe aller übrigen macht.** Wenn man nur einigermaßen den Gang beobachtet hat, welchem die Zunahmen verschiedener Potenzen einer größern Zahl als die Einheit folgen (§. 126), so wird man die Wahrheit dieser Behauptung gleich einsehen, weil unter diesen Potenzen die höchste um so mehr diejenigen übertrifft, welche niedriger als diese sind, je mehr die Zahl, worauf es hier ankommt, zunimmt, so daß nichts den Ueberschuß der ersten über jede der andern begränzt; um so mehr erwäge man nun Folgendes, um eine Zahl zu finden, welche diesen Bedingungen ein Genüge thut.

Man sieht leicht, daß der ungünstigste Fall, welcher hier eintreten kann, dieser ist, wo alle Coefficienten der Gleichung dem größten von allen gleich sind, das ist, wenn man statt

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0$$

folgende macht;

$$x^m + Sx^{m-1} + Sx^{m-2} \ldots + Sx + S = 0,$$

wo S den größten der Coefficienten P, $Q \ldots T$, U bezeichnet. Die Differenz zwischen dem ersten Gliede und der Summe aller andern wäre alsdann

$$x^m - S\,(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + 1);$$

man wird bemerken, daß

$$x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1}$$ (§. 158),

und durch diesen Ausdruck wird man den vorhergehenden verwandeln in

$$x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1} \text{ oder in } x^m - \frac{S\,x^m}{x-1} + \frac{S}{x-1}.$$

Wenn man M an die Stelle von x setzt, erhält man

$$M^m - \frac{S\,M^m}{M - 1} + \frac{S}{M - 1},$$

eine Größe, welche man positiv macht, wenn man setzt

$$M^m = \frac{S\,M^m}{M - 1};$$

dividirt man nun jeden Theil dieser Gleichung durch M^m, so erhält man

$$1 = \frac{S}{M - 1}, \text{ woraus folgt } M = S + 1.$$

Substituirt man also statt x den größten der Coefficienten der Gleichung, um die Einheit vermehrt, so wird das erste Glied derselben größer als die Summe aller übrigen werden, und folglich wird sein Zeichen das Zeichen des Resultats der Substitution bestimmen.

Die Zahl M könnte noch kleiner sein, wenn man bloß den Theil der positiven Glieder in der vorgelegten Gleichung größer als den Theil der negativen erhalten wollte; denn es würde hinreichen, das erste Glied größer als die Summe aller übrigen Glieder zu machen, selbst dann, wenn ihre Coefficienten gleich wären nicht dem größten von allen sondern nur dem größten der negativen Coefficienten; man hat also nur nöthig, für M diesen Coefficienten mit der Einheit zu bestimmen *).

Hieraus folgt, daß die positiven Wurzeln der vorgelegten Gleichung zwischen 0 und $S + 1$ enthalten sein müssen.

---

*) Man findet in der *Résolution des équations numériques* par *Lagrange* Formeln, welche engere Grenzen geben; aber das eben Gesagte reicht hin, um die Fundamentalgesetze von der Auflösung der Gleichungen unabhängig von der Betrachtung des Unendlichen zu machen.

Man kann auf eben diese Art eine Grenze für die negativen Wurzeln erhalten; man braucht nämlich nur $-y$ statt x in der vorgelegten Gleichung zu substituiren und dann das erste Glied positiv zu machen, wenn es negativ wird (§. 178). Es ist offenbar, daß nach dieser Umformung die positiven Werthe von y mit den negativen von x und umgekehrt einerlei sein werden. Wenn nun nach dieser Veränderung der größte negative Coefficient R ist, so wird $R+1$ eine Grenze für die positiven Werthe von y und folglich $-R-1$ die der negativen Werthe von x sein

Wollte man endlich für die kleinste der Wurzeln eine nähere Grenze als Null erhalten, so würde man dazu gelangen, wenn man $\frac{1}{y}$ anstatt x in die vorgelegte Gleichung setzte, und indem man die in y transformirte nach Vorschrift des §. 178 vorbereitet. Da die Werthe von y die umgekehrten von x sind, so würde der größte der ersteren entsprechen, der kleinsten von den zweiten, und umgekehrt. Wenn also $S'+1$ die höhere Grenze des Werthes von y bezeichnete oder man hätte

$$y < S' + 1,$$

welches geben würde

$$\frac{1}{x} < S' + 1,$$

so würde daraus nach und nach hervorgehen

$$1 < (S' + 1)\, x, \quad \frac{1}{S' + 1} < x.$$

Es ist in der That leicht, zu sehen, daß man, ohne die Ordnung der Größe von zwei durch die Zeichen $<$ oder $>$ getrennten Größen zu stören, durch eine und dieselbe Größe multipliciren und dividiren und daß man auch eine und dieselbe Größe auf jeder Seite der Zeichen $>$ und $<$ addiren und subtrahiren könne, welche Zeichen in diesem Betracht dieselben Eigenschaften als das Gleichheitszeichen haben.

§. 213.

Aus diesem Verfahren folgt, daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade nothwendigerweise eine reelle Wurzel haben müsse, deren Zeichen dem des letzten Gliedes entgegengesetzt ist; denn es sei die Zahl M so beschaffen, daß das Zeichen der Größe

$$M + PM^{m-1} + QM^{m-2} \ldots + TM \pm U$$

nur von dem ihres ersten Gliedes M^m abhänge, weshalb der Exponent m ungerade ist, so wird das Glied M^m dasselbe Zeichen als die Zahl M haben (§. 128). Dieses vorausgesetzt, wird man, wenn das letzte Glied U das Zeichen $+$ hat und wenn man $x = -M$ setzt, ein Resultat mit einem der Annahme $x = o$ entgegengesetzten Zeichen haben; woraus man sieht, daß die vorgelegte Gleichung eine Wurzel zwischen o und $-M$ ist, das ist, daß sie eine negative hat. Wenn hingegen das letzte Glied U das Zeichen $-$ hat, so mache man $x = +M$; man erhält alsdann ein Resultat, dessen Zeichen demjenigen entgegengesetzt ist, welches die Annahme $x = o$ giebt, und die Wurzel wird in diesem Fall zwischen o und $+M$ liegen, das heißt, sie wird positiv sein.

§. 214.

Wenn aber die vorgelegte Gleichung von einem geraden Grade ist und das erste Glied M^m positiv bleibt, welches Zeichen man auch M giebt, so kann man sich nicht nach dem vorhergehenden Verfahren von der Existenz einer reellen Wurzel überzeugen, wenn das letzte Glied das Zeichen $+$ hat, weil man immer ein positives Resultat erhalten wird, man mag $x = o$ oder $x = \pm M$ setzen; wenn aber dieses Glied negativ ist, so findet man, wenn

$$x = +M, \qquad x = o, \qquad x = -M$$

gesetzt wird, drei Resultate, welche respective mit den Zeichen $+$, $-$ und $+$ behaftet sind, und die vorgelegte Gleichung

hat also in diesem Fall wenigstens zwei reelle Wurzeln, eine positive, welche zwischen M und o, und eine negative, welche zwischen o und $-M$ anzutreffen sein muß: es hat also jede Gleichung von einem geraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, wenigstens zwei reelle Wurzeln, deren eine positiv und die andere negativ ist.

§. 215.

Wir wollen nun zur Auflösung der Gleichungen durch Näherung übergehen, und um dasjenige, was wir über diesen Gegenstand sagen wollen, recht anschaulich zu machen, wollen wir zuvörderst ein Beispiel wählen. Es sei die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 7 = 0;$$

da der größte negative Coefficient dieser Gleichung -4 ist, so folgt aus dem §. 212, daß die größte positive Wurzel kleiner als 5 ist. Substituirt man darin $-y$ statt x, so verwandelt sie sich in

$$y^4 + 4y^3 + y + 27 = 0,$$

und da dieses Resultat lauter positive Glieder hat, so sehen wir daraus, daß y negativ sein muß, woraus folgt, daß x nothwendigerweise positiv sein muß, und daß daher die vorgelegte Gleichung keine negative Wurzeln haben kann; die reellen Wurzeln sind also zwischen o und $+5$ enthalten.

Die erste Methode, welche sich uns zur Entdeckung einer nähern Gränze darbietet, besteht darin, nach einander

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4$$

zu setzen, und wenn zwei dieser Zahlen, in der vorgelegten Gleichung substituirt, Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben, so wird man dadurch neue Gränzen der Wurzeln erhalten. Setzt man nun

$x = 1$, so wird ihr erster Theil $+ 21$,
$x = 2$, ... $+ 5$,
$x = 3$, ... $- 9$,
$x = 4$, ... $+ 15$;

man sieht also, daß diese Gleichung zwei reelle Wurzeln hat, die eine ist zwischen 2 und 3 und die andere zwischen 3 und 4 enthalten. Um sich der ersten noch mehr zu nähern, nehme man das arithmetische Mittel zwischen diesen beiden Zahlen, welches 2,5 ist (**Arithm.** §. 129); setzt man nun $x = 2{,}5$, so zeigt das Resultat dieser Substitution

$$+ 39{,}0625 - 62{,}5 - 7{,}5 + 27 = - 3{,}9375$$

dadurch, daß es negativ ist, daß die gesuchte Wurzel zwischen 2 und 2,5 enthalten ist. Nimmt man von diesen beiden Zahlen das Mittel, so erhält man 2,25; begnügt man sich mit $x = 2{,}3$, so wird man die gesuchte Wurzel bis auf ein Zehntheil beinahe richtig erhalten, und durch folgendes Verfahren, welches **Newton** angiebt, kann man sich der gesuchten Wurzel sehr schnell nähern.

Man setze $x = 2{,}3 + y$; es ist offenbar, daß die unbekannte y nur ein sehr kleiner Bruch sein kann, von welchem man also das Quadrat und die höhern Potenzen außer Acht lassen kann; man wird auf diese Art erhalten

$$\begin{aligned} x^4 &= (2{,}3)^4 + 4\,(2{,}3)^3\, y, \\ -4x^3 &= -4(2{,}3)^3 - 12\,(2{,}3)^2\, y, \\ -3x &= -3(2{,}3) - 3y; \end{aligned}$$

und durch diese Substitution wird die vorgelegte Gleichung werden

$$- 0{,}5839 - 17{,}812\, y = 0$$

und also geben

$$y = - \frac{0{,}5839}{17{,}812}.$$

In dieser ersten Operation wollen wir nicht über die Hunderttheile hinausgehen und wir werden dann erhalten

$$y = - 0{,}03 \quad \text{und} \quad x = 2{,}3 - 0{,}03 = 2{,}27.$$

Um einen neuen Werth für x zu erhalten, welcher genauer als der vorhergehende ist, würde man $x = 2{,}27 + y'$ setzen; und wenn man diesen Werth in der vorgelegten Gleichung substituirt, braucht man bloß die ersten Potenzen von y' in Rechnung zu bringen. Man wird alsdann finden

$$— 0{,}04595359 — 18{,}046468y' = 0,$$

woraus folgt

$$y' = — \frac{0{,}04595359}{18{,}046468} = — 0{,}0025,$$

folglich $x = 2{,}2675$. Man kann, wenn man dieses Verfahren fortsetzt, sich dem wahren Werthe von x, so viel man will, nähern.

Die zweite reelle Wurzel, welche zwischen 3 und 4 enthalten ist, wird, wenn sie auf eben die Art gesucht wird,

$$x = 3{,}6797$$

sein, wenn man sich mit 4 Decimalstellen begnügt.

§. 216.

Man kann sich von der Genauigkeit der eben auseinandergesetzten Methode überzeugen, wenn man die Grenze der Werthe derjenigen Glieder sucht, welche man außer Acht läßt.

Wenn die vorgelegte Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0$$

wäre, so würde die Substitution von $a+y$ statt x die erste von denjenigen, welche wir in §. 204 gefunden haben, zum Resultat geben, weil a, indem es keine Wurzel der Gleichung sondern nur ein näherungsweise gefundener Werth von x ist, die Größe

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + Ta + U$$

nicht auf Null reduciren kann. Bezeichnet man nun diese letztere durch V, so wird man statt der Gleichung (d) des citirten §. folgende erhalten

$$V + \frac{A}{1}y + \frac{B}{1.2}y^2 + \frac{C}{1.2.3}y^3 \ldots + y = 0,$$

aus welcher man zieht

$$Ay = — V — \frac{B}{1.2}y^2 — \frac{C}{1.2.3}y^3 \ldots — y^m,$$

$$y = — \frac{V}{A} — \frac{By^2}{1.2A} — \frac{Cy^3}{1.2.3A} \ldots — \frac{y^m}{A}.$$

Vernachläßigt man die Potenzen von y, welche die erste übersteigen, so wird man erhalten

$$y = -\frac{V}{A},$$

und der Fehler ist

$$-\frac{By^2}{1.2A} - \frac{Cy^3}{1.2.3A} \ldots\ldots - \frac{y^m}{A}.$$

Wenn a von dem eigentlichen Werthe von x nur um eine kleine Größe als $\frac{1}{p}a$ unterschieden ist, so wird der obige Fehler kleiner werden als die Zahl, welche erhalten wird, wenn man daselbst $\frac{1}{p}a$ statt y substituirt, welches geben würde

$$-\frac{B}{1.2A}\left(\frac{a}{p}\right)^2 - \frac{C}{1.2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3 \ldots. - \frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m.$$

Wenn man diese Größe berechnet, wird man sich gleich überzeugen können, ob sie in Rücksicht auf $\frac{V}{A}$ außer Acht gelassen werden kann; und wenn man sie in Rücksicht auf diese noch sehr beträchtlich finden sollte, so müßte man für a eine andere Zahl suchen, welche dem eigentlichen Werth von x näher liegt.

Wenn man übrigens verschiedene Werthe für y, y', y'' u. s. w. berechnet hat und die erhaltenen Resultate eine abweichende Reihe bilden, so kann die Annäherung in keinen Zweifel gezogen werden.

§. 217.

Die Methode, von welcher wir eben Gebrauch gemacht haben, ist unter dem Namen der **successiven Substitutions-Methode** bekannt. Lagrange hat sie beträchtlich vervollkommnet (siehe die Resolutionen der numerischen Gleichungen). Er hat zuerst gezeigt, daß man, wenn bloß ganze Zahlen substituirt werden, über verschiedene Wurzeln hinweggehen kann, ohne sie wahrzunehmen. In der That würde man die Gleichung

(x

$$(x-\tfrac{1}{3})\,(x-\tfrac{1}{2})\,(x-3)\,(x-4)=0$$

hätte und statt x bloß die Zahlen 0, 1, 2, 3 u. s. w. substituiren möchte; über die Wurzeln $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ hinwegschreiten, ohne ihre Existenz wahrzunehmen, denn man würde haben

$$(0-\tfrac{1}{3})\,(0-\tfrac{1}{2})\,(0-3)\,(0-4)=+\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 3\times 4$$
$$(1-\tfrac{1}{3})\,(1-\tfrac{1}{2})\,(1-3)\,(1-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 2\times 3,$$

Resultate von einerlei Zeichen. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Umstand bloß daher rührt, weil die Substitution von 1 statt x die Zeichen beider Factoren $x-\frac{1}{3}$ und $x-\frac{1}{2}$ zu gleicher Zeit ändert, welche, anstatt daß sie durch die Substitution von 0 statt x beide negativ waren, nun vielmehr positiv werden; wenn man aber statt x eine zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ enthaltene Zahl substituirt, so würde man, da nur der Factor $x-\frac{1}{3}$ allein das Zeichen ändert, ein negatives Resultat erhalten.

Man muß nothwendigerweise auf eine ähnliche Zahl kommen, wenn man statt x Zahlen substituirt, deren Differenz kleiner als die der Wurzeln $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$. Wenn man z. B. die Substitutionen mit $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ u. s. w. macht, so werden zwei Aenderungen der Zeichen Statt finden.

Man könnte gegen das obige Beispiel den Einwurf machen, daß wenn man die Bruch-Coefficienten einer Gleichung weggeschafft habe, so könne sie nur ganze oder irrationale Zahlen und nicht Brüche zu Wurzeln haben; allein es ist leicht zu sehen, daß die irrationalen Zahlen, die man hier durch Brüche ersetzt hat, mehrerer Einfachheit wegen, um weniger als die Einheit verschieden sein können.

Ueberhaupt würden die Resultate allemal dasselbe Zeichen behalten, so oft die Substitution das Zeichen einer geraden Anzahl Factoren ändert *). Um dieser Inconvenienz vorzubeugen, muß man zwischen die zu substituirenden Zahlen, von

*) Es ist daher nicht möglich, durch dieses Verfahren die gleichen Wurzeln zu entdecken, wenn sie in gerader Zahl da sind; alsdann wendet man aber den §. 205 an.

der kleinsten Grenze an bis zur größten, eine kleinere Differenz seßen als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung unter einander haben können; denn durch dieses Mittel müssen die Substitutionen nothwendigerweise zwischen zwei auf einander folgende Wurzeln fallen und können nur die Zeichen eines Factors ändern. Diese Operation erfordert nicht, daß man die kleinste Differenz der Wurzeln kenne, sondern daß man eine Grenze habe, unter welche sie nicht fallen kann.

Um diese Grenze zu erhalten, bilde man die Gleichung für das Quadrat der Differenzen der Wurzeln (§. 208).

Es sei

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + tz + u = 0 \ldots (D),$$

diese Gleichung; um die kleinste ihrer Wurzeln zu erhalten, seße man $z = \frac{1}{v}$ (§. 212), und man wird erhalten

$$\frac{1}{v^n} + p\frac{1}{v^{n-1}} + q\frac{1}{v^{n-2}} \ldots + t\frac{1}{v} + u = 0,$$

oder, wenn man alle Glieder auf einerlei Benennung bringt,

$$1 + pv + qv^2 \ldots + tv^{n-1} + uv^n = 0,$$

und, wenn man v^n vom Coefficienten befreit,

$$v^n + \frac{t}{u}v^{n-1} \ldots + \frac{q}{u}v^2 + \frac{p}{u}v + \frac{1}{u} = 0;$$

und bezeichnet nun $\frac{r}{u}$ den größten negativen Coefficienten dieser Gleichung, so hat man

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1} < z.$$

Man kann hier nur die positive Grenze betrachten, welche die einzige ist, die mit den reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung übereinkommt.

Kennt man die Grenze

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1} = \frac{u}{r+u},$$

welche kleiner ist als das Quadrat der kleinsten Differenz der

Wurzeln der vorgelegten Gleichung, so würde man daraus die Quadratwurzel ziehen, oder wenigstens die Wurzel des nächst kleinern vollständigen Quadrats nehmen; diese Zahl, welche wir durch k bezeichnen wollen, wird den Zwischenraum angeben, den man zwischen jede zwei Zahlen, welche man substituirt setzen muß. Man wird alsdann folgende zwei Reihen bilden:

$$0,\ +k,\ +2k,\ +3k \text{ u. s. w.,}$$
$$-k,\ -2k,\ -3k \text{ u. s. w.,}$$

von welchen die erste bis zur größten Grenze der positiven Wurzeln und die zweite bis zu derjenigen der negativen Wurzeln fortgesetzt werden muß. Aus den Aenderungen der Zeichen, welche die durch die Substitution jeder dieser Zahlen statt x in der vorgelegten Gleichung erhaltenen Resultate darbieten, wird man die verschiedenen reellen Wurzeln derselben, sowohl die positiven als negativen, erkennen können.

§. 218.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

welche uns in §. 208 auf die Gleichung

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$$

geführt hat; setzt man $z = \frac{1}{v}$ und ordnet das Resultat dieser Substitution nach v, so erhält man

$$v^3 - 9v^2 + \frac{42}{49}v - \frac{1}{49} = 0,$$

woraus man zieht

$$v < 10,\ z > \frac{1}{10};$$

man muß also $k =$ oder $< \frac{1}{\sqrt{10}}$ nehmen. Man würde dieser Bedingung ein Genüge leisten, wenn man $k = \frac{1}{4}$ nimmt; aber es ist hinreichend, $k = \frac{1}{3}$ zu nehmen; denn wenn man in die vorhergehende Gleichung 9 statt v setzt, so erhält man

ein positives Resultat, und dieses wird immer größer, je größer der für v substituirte Werth wird, weil die Glieder v^3 und $9v^2$ einander schon vernichten und das Glied $\frac{42}{40}v$ größer als $\frac{1}{49}$ ist.

Die größte Grenze der positiven Wurzeln der vorgelegten Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

ist 8, und die der negativen Wurzeln ist -8; man wird also für x folgende Zahlen zu substituiren haben

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots\ldots\ldots \frac{24}{3},$$

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, \ldots\ldots\ldots -\frac{24}{3}.$$

Man kann die Brüche vermeiden, wenn man $x = \frac{x'}{3}$ setzt; denn alsdann werden die Differenzen zwischen den Werthen von x' das Dreifache derjenigen, welche zwischen den Werthen von x Statt finden und folglich größer als die Einheit sein; man hat alsdann nur nöthig, nach und nach

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots 24,$$

$$-1, -2, -3, \ldots\ldots -24,$$

in die Gleichung

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0$$

zu substituiren.

Die Zeichen der Resultate werden sich von $+4$ zu $+5$, von $+5$ zu $+6$ und von -9 zu -10 ändern, so daß man nur die positiven Werthe haben wird

$$\left.\begin{array}{l} x' > 4 \text{ und } < 5 \\ x' > 5 \text{ und } < 6 \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} x > \frac{4}{3} \text{ und } < \frac{5}{3} \\ x > \frac{5}{3} \text{ und } < \frac{6}{3}, \end{array}\right.$$

und da der negative Werth von x' zwischen -9 und -10 fällt, so wird der von x zwischen $-\frac{9}{3}$ und $-\frac{10}{3}$ liegen.

Wir kennen nun die verschiedenen Wurzeln der vorge-

legten Gleichung bis auf $\frac{1}{3}$ genau und vermittelst des Verfahrens in §. 215 können wir uns denselben mehr nähern.

§. 219.

Das Verfahren, welches wir bei dem Beispiel in §. 215. und bei dem des vorhergehenden §. gebraucht haben, läßt sich auf jede Gleichung eines beliebigen Grades anwenden, und man wird vermittelst derselben die reellen Wurzeln dieser Gleichung näherungsweise finden können. Man kann zwar nicht leugnen, daß der Calcul sehr beschwerlich wird, wenn die vorgelegte Gleichung nur einigermaßen von einem hohen Grade ist; indessen hat man in vielen Fällen nicht nöthig, zur Gleichung D seine Zuflucht zu nehmen, sondern man kann sie durch Mittel ersetzen, welche das Studium der übrigen Zweige der Analysis darbietet *).

Wir wollen indessen zeigen, daß die successiven Substitutionen der Zahlen 0, 1, 2, 3 u. s. w. statt x oft hinreichende Kennzeichen geben, um die Existenz der Wurzeln, deren Differenz kleiner als die Einheit ist, muthmaßen zu können. In dem Beispiel, womit wir uns beschäftigen, geben sie die Resultate

$$+7, \quad +1, \quad +1, \quad +13,$$

welche, nachdem sie von $+7$ und $+1$ abgenommen haben, wieder zu wachsen anfangen. Dieser Rückweg führt natürlich auf die Muthmaßung, daß zwischen den beiden Zahlen $+1$ und $+2$ zwei Wurzeln fallen müssen, welche entweder völlig oder doch beinahe einander gleich sind. Um diese Muthmaßung zu prüfen, muß man die unbekannte Größe multipliciren. Setzt man $x = \frac{y}{10}$, so findet man

$$y^3 - 700y + 7000 = 0,$$

---

*) Man kann auch in *Traité de la Résolution des équations numériques* eine sehr schöne von Lagrange gegebene Methode sehen, die Anwendung von der Gleichung (D) zu vermeiden.

eine Gleichung, welche zwei positive Wurzeln hat, von welchen die eine zwischen 13 und 14 und die andere zwischen 16 und 17 enthalten ist.

Um diese Wurzeln zu finden, hat man nicht nöthig, viele Proben anzustellen, denn man braucht y nur zwischen 10 und 20 zu suchen; hat man aber einmal den Werth dieser unbekannten in ganzen Zahlen bestimmt, so findet man den von x bis auf ein Zehntheil der Einheit genau.

§. 220.

Wenn die Coefficienten der Gleichung, welche man auflösen will, beträchtlich große Zahlen sind, so ist es vortheilhaft, diese Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Coefficienten in weit engere Grenzen eingeschlossen sind. Wenn man z. B. diese Gleichung hätte:

$$x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0,$$

so würde man $x = 10z$ setzen, und es würde dann kommen

$$z^4 - 8z^3 + 19{,}98z^2 - 14{,}937z + 0{,}5 = 0.$$

In diesem Resultate kann man sich zuvörderst begnügen, die ganzen Zahlen zu nehmen, welche den Coefficienten am nächsten kommen, und man wird auf diese Art erhalten

$$z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0{,}5 = 0.$$

Man wird dann nicht finden, daß z zwei zwischen 0 und 1 und zwischen 1 und 2 enthaltene Werthe hat, woraus folgt, daß die der vorgelegten Gleichung zwischen 0 und 10 und zwischen 10 und 20 liegen müssen.

Wir wollen hier nichts von der Untersuchung der imaginairen Wurzeln sagen, weil sie auf Gründen beruht, deren Auseinandersetzung uns sehr weit führen würde; wir wollen sie uns für das **Complement** (II. Theil) dieser Anfangsgründe vorbehalten.

§. 221.

Lagrange hat den successiven Substitutionen eine

Form gegeben, welche den Nutzen hat, daß man bei jeder Operation unmittelbar erkennen kann, um wie viel man sich dem eigentlichen Werthe der Wurzel genähert hat, und welche überdies nicht erfordert, daß man zuvörderst den Werth, bis auf ein Zehntheil genau, richtig gefunden habe.

Wir wollen die ganze Zahl, welche zunächst kleiner als die gesuchte Wurzel ist, durch a bezeichnen; so würde man, um diese Wurzel zu erhalten, nur noch zu a einen Bruch hinzu zu setzen brauchen; man wird also haben $x = a + \frac{1}{y}$. Die aus der Substitution dieses Werths in die vorgelegte Gleichung entspringende Gleichung in y muß nothwendigerweise eine größere Wurzel als die Einheit haben; nennen wir nun die ganze Zahl, welche zunächst kleiner als diese Wurzel ist, b, so wird man für eine zweite Annäherung $x = a + \frac{1}{b}$ erhalten. Da aber b in Rücksicht auf y dasselbe ist, was a in Rücksicht auf x ist, so kann man in der Gleichung in y, $y = b + \frac{1}{y'}$ setzen, und y' muß nothwendig größer als die Einheit sein; bezeichnen wir nun die ganze Zahl, welche zunächst kleiner als die Wurzel der Gleichung in y ist, durch b, so wird man haben

$$y = b + \frac{1}{b'} = \frac{bb' + 1}{b'}.$$

setzt man diesen Werth in den für x, so wird daraus

$$x = a + \frac{b'}{bb' + 1},$$

als eine dritte Annäherung des Werths von x folgen. Man könnte eine dritte finden, wenn man $y' = b' + \frac{1}{y''}$ setzen möchte; denn wenn b'' die nächste kleinere ganze Zahl, als y'' ist, bezeichnet, so würde man haben

$$y' = b' + \frac{1}{b''} = \frac{b'b'' + 1}{b''},$$

woraus folgt

$$y = b + \frac{b''}{b'b'' + 1} = \frac{bb'b'' + b'' + b}{b'b'' + 1},$$

$$x = a + \frac{b'b'' + 1}{bb'b'' + b'' + b}$$

und so fort.

§. 222.

Wir wollen diese Methode auf die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

anwenden. Wir haben schon (§. 218) gesehen, daß die kleinste der positiven Wurzeln dieser Gleichung zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$, das heißt, zwischen 1 und 2 enthalten ist; wir werden also setzen $x = 1 + \frac{1}{y}$, und werden erhalten

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Die Grenze der positiven Wurzeln dieser letztern ist 5, und wenn man nach einander 0, 1, 2, 3, 4 statt y substituirt, so wird man gleich sehen, daß sie zwei Wurzeln hat, die größer als die Einheit sind, nämlich eine zwischen 1 und 2 und die andere zwischen 2 und 3. Es folgt also hieraus

$$x = 1 + \frac{1}{1} \quad \text{und} \quad x = 1 + \frac{1}{2},$$

das heißt

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Diese beiden Werthe correspondiren mit denjenigen, welche wir zwischen $\frac{6}{3}$ und $\frac{5}{3}$, zwischen $\frac{5}{3}$ und $\frac{4}{3}$ gefunden haben, und welche um keine Einheit unterschieden sind.

Um aber den Grad der Genauigkeit weiter zu treiben als bei dem ersten, welcher $y = 1$ giebt, wollen wir

$$y = 1 + \frac{1}{y'}$$

setzen, und wir erhalten

$$y'^3 - 2y'^2 - y' + 1 = 0.$$

Bei dieser Gleichung findet man nur eine Wurzel, welche größer als die Einheit ist, und diese liegt zwischen 2 und 3, welches also giebt

$$y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

woraus folgt

$$x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Setzen wir ferner $y' = 2 + \frac{1}{y''}$, so wird daraus folgen

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

und findet man y'' zwischen 4 und 5 und nimmt man die kleinste Grenze 4, so wird kommen

$y' = 2 + \frac{1}{4}$, $y = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$, $x = 1 + \frac{9}{13} = \frac{22}{13}$.

Nichts ist leichter, als dieses Verfahren fortzusetzen, wenn man $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$ setzt und so fort.

Wir wollen nun zum zweiten Werth von x zurückkehren, welchen wir durch eine erste Annäherung gleich $\frac{3}{2}$ gefunden haben, und welcher zu $y = 2$ stimmt; setzen wir nun $y = 2 + \frac{1}{y'}$ und substituiren diesen Werth in die Gleichung von y, so werden wir, nachdem die Zeichen geändert worden sind, um das erste Glied positiv zu machen, erhalten

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

Diese Gleichung kann eben so wie ihre correspondirende bei der obigen Operation nur eine Wurzel haben, die größer als die Einheit ist, die nämlich zwischen 1 und 2 fällt; nimmt man $y' = 1$, so wird daraus folgen

$$y = 3, \qquad x = \frac{4}{3}.$$

Setzt man ferner

$$y' = 1 + \frac{1}{y''},$$

so erhält man

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0,$$

eine Gleichung, welche nur y'' zwischen 4 und 5 giebt, und woraus man folglich erhält

$$y' = \frac{5}{4}, \quad y = \frac{14}{5}, \quad x = \frac{19}{14}.$$

Um weiter zu gehen, setze man $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$ und so fort.

Die Gleichung $x^3 - 7x + 7 = 0$ hat auch eine negative Wurzel, welche zwischen -3 und -4 enthalten ist. Um sich derselben mehr zu nähern, setze man $x = -3 - \frac{1}{y}$, welches geben wird

$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0$, $y > 20$ und < 21,

woraus folgt

$$x = -3 - \frac{1}{20} = -\frac{61}{20}.$$

Wenn man es weiter treibt, würde man seßen $y = 20 + \frac{1}{y'}$ u. s. w., und man würde immer mehr und mehr genauere Werthe erhalten.

Die verschiedenen Ausdrücke in y, y', y'' u. s. w. werden nur eine Wurzel, größer als die Einheit, haben, so lange nicht zwei oder eine größere Anzahl Wurzeln der vorgelegten Gleichung zwischen den beiden Grenzen a und $a+1$ enthalten sind; wenn aber dieser Umstand Statt findet, wie wir es im obigen Beispiel gesehen haben, so wird man in einigen der Gleichungen in y, y' u. s. w. verschiedene Werthe, die größer als die Einheit sind, finden, woraus dann die Reihen von Gleichungen hervorgehen werden, welche insbesondere die verschiedenen Wurzeln angeben werden, welche die vorgelegte Gleichung zwischen den Grenzen a und $a+1$ hat.

Der Leser kann sich an dieser Gleichung üben:

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

deren reelle Wurzeln zwischen 2 und 3 fallen; er wird für die Werthe von y, y' u. s. w. in ganzen Zahlen

10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12 u. s. w.

finden, und für die x sich nahenden

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{33}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}.$$

Von den Proportionen und Progressionen.

§. 223.

Man hat in der Arithmetik die Erklärungen und Fundamentaleigenschaften der **geometrischen** und **arithmetischen Proportionen** gesehen; wir wollen nun auf die daselbst angestellten Betrachtungen die Algebra anwenden, wodurch wir

zu Resultaten gelangen werden, welche in der Geometrie von vielfältigem Gebrauch sind.

Wir wollen zuvörderst zeigen, daß sowohl die arithmetische als geometrische Proportion durch eine Gleichung ausgedrückt werden kann. Es seien A, B, C, D die vier Glieder der ersten, a, b, c, d die der zweiten, so wird man haben $B - A = D - C$ (Arithm. §. 127), $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (Arithm. (§. 111), Gleichungen, welche, wenn man sie betrachtet, gleichen Werth mit den Ausdrücken

$$A . B : C . D, \qquad a : b = c : d,$$

haben, und welche geben

$$A + D = B + C, \qquad ad = bc.$$

Es folgt hieraus, daß in der arithmetischen Proportion die Summe der äußern Glieder der der mittlern und daß in der geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem der mittlern gleich ist, so wie dieses in der Arithmetik (§. 127, 113), durch Schlüsse bewiesen wird, von welchen die obigen Gleichungen nur Uebersetzuugen sind.

Die umgekehrten Sätze von den vorhergehenden lassen sich leicht beweisen, denn von den Gleichungen

$$A + D = B + C, \qquad ad = bc$$

kommt man sogleich auf

$$B - A = D - C, \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

und wenn also folglich vier Größen so beschaffen sind, daß zwei davon mit den beiden übrigen entweder einerlei Summen oder einerlei Product geben, so werden die ersten die mittlern und die zweiten die äußern Glieder (oder umgekehrt) einer und derselben arithmetischen und geometrischen Proportion sein.

Wenn $B = C$, so wird die arithmetische Proportion eine stetige, zusammenhängende genannt. Dasselbe gilt auch von einer geometrischen, wenn $b = c$, und man hat alsdann:

$$A + D = 2B, \qquad ad = b^2;$$

das heißt, daß in der stetigen arithmetischen Proportion die Summe der äußern Glieder der doppelten mittlern, und daß in einer stetigen geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Quadrate des mittlern Gliedes gleich sei. Man zieht hieraus

$$B = \frac{A+D}{2}, \qquad b = \sqrt{ad},$$

die Größe B ist das Mittel (oder die mittlere arithmetische Proportionale) zwischen A und D, und die Größe b ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und d.

Die Fundamentalgleichungen

$$B - A = D - C, \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

führen auch auf folgende

$$C - A = D - B, \qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b};$$

woraus wir sehen, daß man in den Ausdrücken $A.B : C.D$, $a : b = c : d$ die mittlern Glieder in Ansehung ihrer Stellen verwechseln, und daraus $A.C : B.D$, $a : c = b : d$ herleiten könne. Ueberhaupt kann man mit den Gliedern alle Versetzungen vornehmen, welche mit den Gleichungen übereinstimmen:

$A + D = B + C$ und $ad = bc$ (Arithm. §. 114.)

Wir wollen nun die arithmetische Proportion außer Acht lassen und uns bloß mit der geometrischen beschäftigen.

§. 224.

Man kann zu beiden Theilen der Gleichung $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ eine und dieselbe Größe m hinzusetzen oder davon wegnehmen, so daß man haben wird

$$\frac{b}{a} \pm m = \frac{d}{c} \pm m;$$

bringt man alle Glieder eines jeden Theils auf eine gleiche Benennung, so kommt

$$\frac{b \pm ma}{a} = \frac{d \pm mc}{c},$$

eine Gleichung, welche man unter folgende Form bringen kann

$$\frac{c}{a} = \frac{d \pm mc}{b \pm ma},$$

und welche auf diese geometrische Proportion zurück kommt:

$$b \pm ma : d \pm mc = a : c;$$

und da $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, so hat man auch

$$\frac{d \pm mc}{b \pm ma} = \frac{d}{b}$$

oder $b \pm ma : d \pm mc = b : d.$

Diese beiden Proportionen lassen sich folgendermaßen vortragen: Das erste Hinterglied mehr oder weniger eine gewisse Anzahlmale seines Vorderg liedes verhält sich zum zweiten Hintergliede mehr oder weniger eben so vielmale ein Vorderglied, wie sich das erste Glied zum dritten oder wie sich das zweite zum vierten verhält.

Wenn man die Summen besonders und die Differenzen besonders unter einander vergleicht, so wird man haben

$$\frac{d + mc}{b + ma} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{d - mc}{b - ma} = \frac{c}{a},$$

woraus man schließen kann

$$\frac{d + mc}{b + ma} = \frac{d - mc}{d - ma},$$

das heißt:

$$b + ma : d + mc = b - ma : d - mc,$$

oder besser, wenn man die mittlern Glieder in Ansehung ihrer Stellen verwechselt,

$$b + ma : b - ma = d + mc : d - mc$$

und wenn man $m = 1$ setzt, wird man bloß haben

$$b + a : b - a = d + c : d - c,$$

welches folgendermaßen vorgetragen werden kann:

Die Summe der ersten Glieder verhält sich zu

ihrer Differenz wie die Summe der zwei lezten zu ihrer Differenz.

§. 225.

Da die Proportionen $a : b = c : d$ auch folgendermaßen geschrieben werden können:

$$a : c = b : d,$$

so wird man haben

$$\frac{c}{a} \pm m = \frac{d}{b} \pm m,$$

woraus folgt $$\frac{c \pm ma}{a} = \frac{d \pm mb}{b},$$

und endlich

$$c \pm ma : d \pm mb = a : b \text{ oder } = c : d,$$

welches so viel sagen will, daß das zweite Vorderglied mehr oder weniger eine gewisse Anzahlmale des ersten sich zum zweiten Hintergliede mehr oder weniger derselben Anzahlmale des ersten verhält, wie ein beliebiges Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Dieser Satz kann auch unmittelbar aus dem vorhergehenden §. geschlossen werden; denn wenn man in der ursprünglichen Proportion

$$a : b = c : d$$

die mittlern Glieder ihre Stellen verwechseln läßt, und nun den angeführten Satz anwendet, so hat man successive

$$a : c = b : d,$$

$$c \pm ma : d \pm mb = a : b \text{ oder } = c : d,$$

und giebt man in dieser letztern den Buchstaben a, b, c, d die Benennung wieder, welche sie in der ursprünglichen Proportion haben, so hat man die vorhergehende Aussage.

Macht man $m = 1$, so wird man die besondern Proportionen erhalten:

$$c \pm a : d \pm b = a : b$$
$$= c : d,$$
$$c + a : c - a = d + b : d - b;$$

welches so viel sagen will, daß sich die Summe oder die Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder verhält wie ein Vorderglied zu seinem hintern, und daß sich die Summe der Vorderglieder zu ihrer Differenz verhält wie die der hintern Glieder zu ihrer Differenz.

Allgemein muß, wenn man

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{h}{g} \text{ u. s. w.}$$

hat und wenn man $\frac{b}{a} = q$ setzt, man auch haben

$$\frac{d}{c} = q, \quad \frac{f}{e} = q, \quad \frac{h}{g} = q \text{ u. s. w.},$$

welches geben wird

$$b = aq, \quad d = cq, \quad f = eq, \quad h = gq \text{ u. s. w.};$$

und fügt man diese Gleichungen Theil für Theil an einander, so kommt

$$b + d + f + h = aq + cq + eq + gq$$

oder $b + d + f + h = q\,(a + c + e + g)$,

woraus folgt

$$\frac{b + d + f + h}{a + c + e + g} = q = \frac{b}{a}.$$

Man drückt dieses Resultat in Worten aus, indem man sagt, daß sich in einer Reihe gleicher Verhältnisse $a : b = c : d = e : f = g : h =$ u. s. w. die Summe irgend einer Anzahl Vorderglieder zur Summe einer gleichen Anzahl Hinterglieder verhält, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

§. 226.

Wenn man diese zwei Gleichungen hat

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \text{ und } \frac{f}{e} = \frac{h}{g},$$

so kann man die ersten Theile und die zweiten Theile in einander multipliciren, es wird alsdann die Gleichung

$$\frac{bf}{ae} = \frac{dh}{cg}$$

kommen, welche mit der Proportion

$$ae : bf = cg : dh$$

von einerlei Werth ist, und welche letztere auch erhalten wird, wenn man jedes Glied der Proportion

$$a : b = c : d$$

durch jedes ihm correspondirende Glied in der Proportion

$$e : f = g : h$$

multiplicirt.

Zwei Proportionen, welche dergestalt Glied für Glied in einander multiplicirt sind, nennt man **multiplicirt in der Ordnung**, und die daraus entspringenden Producte sind, wie wir eben gesehen haben, in Proportion; die neuen Verhältnisse sind aus den ersten **zusammengesetzt** (Arithm. §. 123).

Man kann sich leicht überzeugen, daß man eben so zu einer Proportion gelangen würde, wenn man beide Proportionen Glied durch Glied oder nach der **Ordnung** dividirte.

§. 227.

Wenn man hat

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

so kann man hieraus schließen, daß

$$\frac{b^m}{a^m} = \frac{d^m}{c^m},$$

welches giebt

$$a^m : b^m = c^m : d^m,$$

woraus folgt, daß die Quadrate, die Kuben und überhaupt die ähnlichen Potenzen von vier Proportionalgrößen ebenfalls in Proportion sind.

Dasselbe findet auch bei gebrochenen Potenzen Statt; denn da

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}$$

und

$$\sqrt[m]{\frac{d}{c}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}},$$

so wird man haben

$$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}}$$

oder

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d},$$

wenn $a : b = c : d$, das will sagen, daß die Wurzeln eines und desselben Grades aus vier Proportionalgrößen ebenfalls in Proportion sind.

Dieses sind die vorzüglichsten Sätze aus der Theorie der Proportionen. Diese Theorie ist bloß erfunden worden, um Größen dadurch, daß man sie mit andern vergleicht, zu finden. Man hat lange Zeit die lateinischen Benennungen beibehalten, mit denen die verschiedenen Veränderungen und Transformationen, welche eine Proportion erleiden kann, belegt wurden; indessen sucht man jetzt das Gedächtniß derjenigen, welche die Mathematik studiren, nicht zu überladen, und das ganze Gebäude der Proportionen würde entbehrlich werden, wenn man statt derselben die ihnen correspondirenden Gleichungen substituiren möchte, welche, wie ich glaube, der Methode mehr Einförmigkeit und den Ideen mehr Reinheit geben würden.

§. 228.

Der Uebergang von den Proportionen zu den Progressionen ist leicht. Nachdem man nämlich gesehen hat, daß in der stetigen arithmetischen Proportion drei Größen vorkommen, von welchen die letzte um eben so viel die zweite übertrifft, als diese selbst die erste übertrifft, kam man darauf, eine unbestimmte Anzahl Größen a, b, c, d, e u. s. w. zu

betrachten, von welchen jede ihre nächst vorhergehende um einerlei Größe δ übertraf, so daß

$$b = a + \delta, \quad c = b + \delta, \quad d = c + \delta, \quad e = d + \delta \quad \text{u. s. w.}$$

Das Ganze dieser Größen wird folgendermaßen geschrieben:

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \quad \text{u. s. w.}$$

und eine **arithmetische Progression** genannt; wir glauben indessen, diese Benennung in **Progression durch gleiche Differenzen** verwandeln zu müssen. (Siehe **Arithmetik**, Note des §. 127).

Man kann irgend ein Glied dieser Progression ohne Hülfe derjenigen, die dazwischen liegen, berechnen. In der That erhält man, wenn man für b seinen Werth in den für c setzt,

$$c = a + 2\delta;$$

durch diesen letztern findet man

$$d = a + 3\delta, \quad \text{dann} \quad e = a + 4\delta$$

und so fort; woraus man sieht, daß, wenn l das Glied desjenigen Ranges ist, welcher durch n angesetzt ist, alsdann sein muß

$$l = a + (n - 1)\,\delta.$$

Es sei z. B. die Progression

$$\div 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17 \quad \text{u. s. w.}$$

Hier ist das erste Glied $a = 3$, die Differenz (oder das **Verhältniß**) $\delta = 2$; man findet also für das achte Glied

$$3 + (8 - 1)\,2 = 17,$$

so wie wir es vorher gefunden haben, indem wir alle vorhergehenden Glieder berechneten.

Die Progression, welche wir so eben betrachtet haben, war eine **wachsende**; schreibt man sie hingegen in umgekehrter Ordnung, wie diese

$$\div 17 \,.\, 15 \,.\, 13 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 1 \,.\, -1 \,.\, -3 \quad \text{u. s. w.},$$

so würde sie eine **abnehmende** sein. Auch bei dieser findet man jedes beliebige Glied vermittelst der Formel $a + (n - 1)\,\delta$, wenn man nur erwägt, daß in diesem Falle δ negativ gesetzt

werden muß, weil die Differenz nun von jenem Gliede abgezogen werden muß, um das nächstfolgende zu erhalten.

§. 229.

Man kann auf eine sehr einfache Art die Summe einer beliebigen Anzahl Glieder einer arithmetischen Proportion finden. Wenn nämlich diese Progression durch

$$\div a \cdot b \cdot c \ldots\ldots\ldots\ldots i \cdot k \cdot l$$

vorgestellt ist und S die Summe aller ihrer Glieder bezeichnet, so wird man haben

$$S = a + b + c \ldots\ldots\ldots\ldots + i + k + l.$$

Schreibt man die Glieder des letzten Theils dieser Gleichung in umgekehrter Ordnung, so wird man ferner erhalten

$$S = l + k + i \ldots\ldots\ldots + c + b + a.$$

Setzt man diese Gleichung zur ersten und zieht die correspondirenden Glieder zusammen, so kommt

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+i) \ldots + (i+c) + (k+b) + (l+a);$$

aus der Natur der Progression hat man, wenn man vom ersten Gliede ausgeht,

$$a + \delta = b,\quad b + \delta = c \ldots\ldots i + \delta = k,\quad k + \delta = l,$$

und folglich, wenn man vom letzten ausgeht,

$$l - \delta = k,\quad k - \delta = i, \ldots\ldots c - \delta = b,\quad b - \delta = a;$$

folglich ersieht man aus der Addition der correspondirenden Gleichungen, daß

$$a + l = b + k = c + i \text{ u. s. w.},$$

und daß folglich

$$2S = n\,(a + l);$$

woraus sich ergiebt

$$S = \frac{n\,(a + l)}{2}.$$

Wendet man diese Formel auf die Progression

$$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \text{ u. s. w.}$$

an, so findet man für die Summe der ersten acht Glieder

$$\frac{(3 + 17)8}{2} = 80.$$

§. 230.

Die Gleichung

$$l = a + (n - 1)\,\delta,$$

hinzugefügt zu

$$S = \frac{(a + l)\,n}{2},$$

giebt die Mittel, zwei von den fünf Größen a, δ, n, l und S zu finden, wenn die übrigen drei bekannt sind; wir wollen uns aber dabei nicht aufhalten, jeden der Fälle, welche sich darbieten können, insbesondere zu behandeln.

§. 231.

Man hat aus dieser Proportion die Progressionen durch Quotienten (oder die geometrischen Progressionen) gezogen, welche in einer Reihe von Gliedern besteht, die so beschaffen sind, daß ein jedes Glied, durch sein vorhergehendes dividirt, immer einerlei Quotienten giebt, wo man auch diese zwei Glieder annehmen mag. Die Reihen

$$\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{u. s. w.},$$

$$\div\ 45 : 15 : 5 : \tfrac{5}{3} : \tfrac{5}{9} : \text{u. s. w.}$$

sind geometrische Progressionen dieser Art; der Quotient (oder der Name) ist in der ersten 3 und in der andern $\frac{1}{3}$; die erste ist wachsend und die andere abnehmend. Jede dieser Progressionen bildet eine Reihe gleicher Verhältnisse, dieserhalb schreibt man sie wie oben.

Es seien

$$a, b, c, d \ldots\ldots k, l$$

die Glieder irgend einer geometrischen Reihe; setzt man nun $\frac{b}{a} = q$, so werden wir aus der Natur dieser Progression haben

$$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \ldots = \frac{l}{k}$$

oder $\quad b = aq,\ c = bq,\ d = eq,\ e = dq \ldots l = kq$

Setzt man nun nach einander den Werth von b in den von

c, diesen letztern in den von d und so fort mit den übrigen, so wird man finden

$$b = aq,\quad c = aq^2,\quad d = aq^3,\quad e = aq^4 \ldots l = aq^{n-1},$$

wenn man durch n die Stelle des Gliedes l oder die Anzahl der Glieder bezeichnet, welche man in der vorgelegten Progression betrachtet.

Mit Hülfe der Formel $l = aq^{n-1}$ kann man jedes beliebige Glied finden, ohne erst die vorhergehenden zu entwickeln. Das zehnte Glied der Progression

$$\div\div\ 2 : 6 : 18 \text{ u. s. w.}$$

z. B. wird gleich sein $2 \cdot 3^9 = 39366$.

§. 232.

Man kann auch die Summe so vieler Glieder erhalten, als man nur will, in der Progression

$$\div\div\ a : b : c : d \text{ u. s. w.},$$

wenn man hierzu die Gleichungen fügt

$$b = aq,\quad c = bq,\quad d = cq,\quad e = dq, \ldots l = kq;$$

denn man erhält alsdann

$$b + c + d + e \ldots + l = (a + b + c + d \ldots + k)\, q;$$

und bezeichnet man nun die gesuchte Summe durch S, so wird man haben

$$b + c + d + e \ldots + l = S - a$$
$$a + b + c + d \ldots + k = S - l,$$

woraus man schließt

$$S - a = q\,(S - l)$$

und folglich

$$S = \frac{ql - a}{q - 1}.$$

Im obigen Beispiel würde man für die Summe der zehn ersten Glieder der Progression

$$\div\div\ 2 : 6 : 18 \text{ u. s. w.}$$

finden

$$\frac{2 \times 3^{10} - 2}{2} = 3^{10} - 1 = 59048.$$

§. 233.

Die beiden Gleichungen

$$l = a\,q^{n-1}, \qquad S = \frac{q\,l - a}{q - 1}$$

enthalten alle Beziehungen, welche die fünf Größen a, q, n, l und S zu einander haben können in einer geometrischen Progression, und man kann vermittelst derselben jede beliebige zwei dieser Größen finden, wenn die übrigen drei gegeben sind.

§. 234.

Wenn man in dem Ausdruck für S statt l, $a\,q^{n-1}$ substituirt, so wird er in

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

verwandelt.

Wenn nun q eine ganze Zahl ist, so wird q^n desto größer, je größer n angenommen wird, und S wird jede beliebige Größe übertreffen können, wenn man n einen angemessenen Werth giebt, das heißt, wenn man eine hinlängliche Anzahl Glieder der vorgelegten Progression nimmt. Wenn aber q ein durch $\frac{1}{m}$ vorgestellter Bruch ist, so wird man haben

$$S = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m - 1};$$

und es wird offenbar das Glied $\frac{a}{m^{n-1}}$ desto kleiner, je größer n angenommen wird, und folglich nähert sich der Werth von S immer mehr der Größe $\frac{am}{m-1}$, von welcher er nur um

$$\frac{a}{(m - 1)\,m^{n-1}}$$

unterschieden ist; je mehr Glieder man also in der vorgelegten Progression nimmt, desto mehr wird sich ihre Summe $\frac{a^m}{m-1}$

nähern. Sie kann selbst um weniger als jede angebliche auch noch so kleine Größe verschieden sein, ohne ihr jemals völlig gleich zu werden.

Die Größe $\frac{am}{m-1}$, welche wir durch L bezeichnen wollen, ist also, wie man sieht, eine Grenze, welcher sich die durch S ausgedrückten Partialsummen immer mehr und mehr nähern.

Wenden wir diese Betrachtungen auf die Progression

$$\div\ 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \text{u. s. w.}$$

an, so werden wir haben

$$a = 1, \qquad q = \frac{1}{m} = \tfrac{1}{2},$$

woraus folgt

$$m = 2, \qquad L = \frac{am}{m-1} = 2;$$

und je mehr Glieder von der obigen Progression genommen werden, desto mehr wird sich ihre Summe der Zahl 2 nähern. Man findet auch wirklich

$$1 = 1 = 2 - 1,$$
$$1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = 2 - \tfrac{1}{2},$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4} = 2 - \tfrac{1}{4},$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} = 2 - \tfrac{1}{8},$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{31}{16} = 2 - \tfrac{1}{16}$$

u. s. w.

Der Ausdruck für L kann als die Summe der bis ins Unendliche abnehmenden geometrischen Reihe betrachtet werden und auf diese Art stellt man ihn auch gewöhnlich vor; man kann sich indessen eine sehr richtige Idee davon verschaffen, wenn man ihn als die Grenze betrachtet.

§. 235.

Man kann aus dem Ausdruck

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

alle Glieder finden, welche die Progression bilden, von welchen sie die Summe angiebt, denn wenn man die Division von $q^n - 1$ durch $q - 1$ (§. 158) verrichtet, so findet man

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots\ldots + q^{n-1},$$

welches giebt

$$S = a + aq + aq^2 \ldots\ldots + aq^{n-1}.$$

Der Werth für L führt zu eben diesem Zweck, wenn man die Division von m durch $m - 1$ folgendermaßen verrichtet:

$$\begin{array}{r|l} m & m - 1 \\ \hline -m + 1 & 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{u. s. w.} \\ \hline -1 + \frac{1}{m} & \\ \hline -\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} & \\ \hline -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} & \\ \hline \text{u. s. w.} & \end{array}$$

Man dividirt nämlich zuerst auf die gewöhnliche Art m durch das erste Glied des Divisors, welches zum Quotienten 1 giebt; man multiplicirt dann diesen Quotienten durch den Divisor und zieht das Product vom Dividendus ab; man dividirt ferner den Rest 1 durch das erste Glied des Divisors; es findet sich dann zum Quotienten $\frac{1}{m}$, welchen man mit dem Divisor multiplicirt, und man erhält zum Rest $\frac{1}{m}$, mit welchem eben so wie mit dem vorhergehenden verfahren wird. Wenn man so fortfährt, wird man leicht das Gesetz abnehmen können, welches die Partialquotienten unter einander beobachten, und es wird sich dann ergeben, daß der Ausdruck $\frac{m}{m-1}$ mit der Reihe

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{u. s. w.},$$

bis ins Unendliche fortgesetzt, von gleichem Werth ist; setzt man für m diesen Werth $\frac{1}{q}$ und multiplicirt mit a, so findet man wiederum

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \text{u. s. w.}$$

für die Progression, deren Grenze durch L ausgedrückt ist.

§. 236.

Man betrachtet die Entwickelung

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{u. s. w.}$$

als den Werth des Bruches $\frac{m}{m-1}$, so oft sie convergirend ist, das heißt, so oft die Glieder, welche sie zusammensetzen, desto mehr abnehmen, je mehr sie sich vom ersten Gliede entfernen.

In der That, wenn man die vorhergehenden nach einander verrichteten Divisionen beim ersten, zweiten, dritten ..... Rest abbricht, findet man

die Quotienten 1	und die Reste 1
$1 + \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
u. s. w.	u. s. w.;

die ersten nähern sich um so mehr dem wahren Werthe, je mehr die andern abnehmen, und dieser Umstand kann nur dann eintreten, wenn m die Einheit übertrifft. In allen andern Fällen kann man sich nicht erlauben, die Reste außer Acht zu lassen, welche, indem sie immer mehr zunehmen, dadurch zu erkennen geben, daß sich die Quotienten immer mehr von dem wahren Werthe entfernen.

Um dieses besser einzusehen, ist es hinreichend, nach einander $m=2$, $m=1$, $m=\frac{1}{2}$ zu setzen. Die erste Annahme giebt

$$\frac{m}{m-1} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{u. s. w.}$$

und wir haben schon gesehen (§. 234), daß sich die Reihe, welche den zweiten Theil zusammensetzt, wirklich immer mehr und mehr dem Werth 2 nähert.

Die zweite Annahme führt auf

$$\frac{m}{m-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{u. s. w.}$$

Dieses Resultat $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. s. w., ins Unendliche fortgesetzt, giebt eine unendliche Größe, wie es die Natur des Ausdrucks $\frac{1}{0}$ verlangt; wenn man indessen die Reste in diesem Beispiel außer Acht läßt, so könnte man auf eine Ungereimtheit stoßen, denn da der Divisor durch den Quotienten multiplicirt den Dividendus wieder hervorbringen muß, so müßte

$$1 = (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots)\, 0$$

sein; nun vernichtet sich der zweite Theil gänzlich, man hat also $1 = 0$.

Die dritte Annahme führt auf nicht minder ungereimte Folgerungen, wenn man die Reste wegläßt und die daraus entspringende Reihe als einen Ausdruck für den Werth des Bruches betrachtet, von welchem sie hergeleitet ist. Wenn man $m = \frac{1}{2}$ setzt, findet man

$$\frac{m}{m-1} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{u. s. w.},$$

welches offenbar falsch ist.

Diese Widersprüche verschwinden, wenn man in Erwägung zieht, daß im zweiten Falle die Reste

$$1, \quad \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{m^2}, \quad \frac{1}{m^3} \text{ u. s. w.}$$

alle gleich sind, und daß sie, weil sie nicht mehr abnehmen, auch nicht vernachläßigt werden dürfen, so weit man auch diese Reihe fortsetzen mag. Fügt man also einen dieser Reste zum zweiten Theil der Gleichung

$$1 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots).\, 0$$

hinzu, so wird sie richtig. Im dritten Fall bilden die Reste

$$1;\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3}\ \text{u. s. w.}$$

die wachsende Progression 1, 2, 4, 8, 16 u. s. w., und wenn man zu jedem Quotienten den Bruch hinzusetzt, welcher aus dem ihm zugehörigen Reste entspringt, so werden die genauern Ausdrücke von $\frac{m}{m-1}$ sein

$$1 + \frac{1}{m-1}$$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-1)}$$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2(m-1)}$$

u. s. w.,

welche alle — 1 geben, wenn man $m = \frac{1}{2}$ setzt.

Setzt man $m = -n$, so verwandelt sich der Bruch $\frac{m}{m-1}$ in $\frac{n}{n+1}$; die Reihe, welche die Entwickelung dieses Bruchs ausdrückt, wird sich verwandeln in

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \text{u. s. w.},$$

und setzt man $n = 1$, so wird man erhalten

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{u. s. w.},$$

eine Entwickelung, welche bald 1 und bald 0 wird und welche folglich den wahren Werth des Bruchs $\frac{n}{n+1}$, welcher in diesem Fall $\frac{1}{2}$ ist, wechselweise entweder übertrifft oder von ihm übertroffen wird; da indessen diese letztere Reihe nicht convergirt, so kann sie auch den wahren Werth nicht angeben, und man muß nothwendigerweise bei jedem Gliede, wo man abbricht, den Rest in Rechnnng bringen.

Wenn man in der vorhergehenden Reihe $n = 2$ setzt, so erhält man

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \text{u. s. w.};$$

daher werden zwar die Partialsummen der Reihe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ u. s. w. wechselweise kleiner und größer als der wahre Werth von $\frac{n}{n+1}$ werden, welcher hier $\frac{2}{3}$ ist; indessen nä-

hern sie sich ihm immer mehr, weil die vorgelegte Reihe convergirend ist.

Ob nun gleich die **divergirenden** Reihen, das ist, diejenigen, deren Glieder immer mehr zunehmen, sich von dem eigentlichen Werthe des Ausdrucks, von welchen sie abgeleitet sind, immer mehr und mehr entfernen, so müssen sie nichts desto weniger als die Entwickelung dieses Ausdrucks betrachtet werden und können dazu dienen, diejenigen ihrer Eigenschaften zu entdecken, welche von der Summation derselben unabhängig sind.

§. 237.

Wenn man irgend eine algebraische Division, so wie oben (§. 235) mit den Größen m und $m-1$ geschehen ist, fortsetzt, so wird man immer dahin gelangen, den Quotienten durch eine unendliche Reihe **einnahmiger** Glieder auszudrücken. Die Ausziehung der Wurzeln aus unvollkommenen Potenzen, auf eben diese Art mit den nach einander folgenden Resten fortgesetzt, führt ebenfalls auf unendliche Reihen; allein diese Reihen werden ungleich leichter durch die **Binomialformeln** erhalten, wie wir im **Complemente** (II. Theil) zeigen werden, wo wir die bekanntesten Reihen abhandeln wollen.

Theorie der Exponentialgrößen und der Logarithmen.

§. 238.

In allen Aufgaben, welche wir bisher aufgelöst haben, kam keine unbekannte Größe im Exponenten vor; es würde sich aber ganz anders verhalten, wenn wir die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression aus dem ersten Gliede, dem letzten Gliede und dem Verhältniß finden wollte. In der That würden wir die Gleichung

$$l = aq^{n-1} \quad (\S. 231),$$

haben, in welcher n die unbekannte Größe wäre, und wenn zur Abkürzung $n - 1 = x$ gesetzt wird, würde man erhalten $l = aq^x$. Die bisher aus einander gesetzten directen Methoden können diese Gleichung nicht auflösen, und die Größen, die so beschaffen sind, wie hier x, können durch keins der Zeichen ausgedrückt werden, von welchen wir im Vorhergehenden Gebrauch gemacht haben. Um mehr Licht über diesen Gegenstand zu verbreiten, wollen wir nach Euler zeigen, wie die verschiedenen Operationen der Algebra zusammenhängen und wie jede derselben auf eine neue Art von Größen führt.

§. 239.

Es seien a und b zwei Größen, welche zusammengesetzt werden sollen, so wird man haben

$$a + b = c,$$

und wenn man von dieser Gleichung a oder b ausgehen will, so findet man

$$a = c - b, \quad b = c - a;$$

dieses ist also, wie man sieht, der Ursprung der Subtraction, und wenn diese letztere Operation sich nicht in der angezeigten Ordnung vollziehen läßt, so wird das Resultat negativ.

Die wiederholte Addition einer und derselben Größe führt auf die Multiplication; wenn a den Multiplicator, b den Multiplicandus und c das Product bezeichnet, so hat man

$$ab = c,$$

woraus man zieht

$$a = \frac{c}{b}, \quad b = \frac{c}{a};$$

hieraus entstehen die Division und die Brüche, welche letztere eine Folge der Division sind, wenn sich diese nicht ohne Rest verrichten läßt.

Die wiederholte Multiplication einer und derselben Größe durch sich selbst bringt die Potenzen dieser Größen hervor; wenn b angiebt, wie viel mal die Größe a in der

Potenz, welche man betrachtet, als Factor angesetzt ist, so hat man

$$a^b = c.$$

Diese Gleichung ist von der vorhergehenden darin wesentlich unterschieden, daß in dieser die Größen a und b nicht auf einerlei Art davon abhängen, woraus folgt, daß die Gleichung in Rücksicht auf die eine ganz anders als in Rücksicht auf die andere aufgelöst werden muß. Wenn a gesucht wird, so ist eine bloße Ausziehung der Wurzel hinreichend, sie zu finden und diese Operation führt auf eine neue Art von Größen, nämlich die irrationalen; was b betrifft, so hängt die Bestimmung derselben von besondern Methoden ab, welche wir zeigen wollen, nachdem wir die vorzüglichsten Eigenschaften der Gleichung $a^b = c$ aus einander gesetzt haben werden.

§. 240.

Es ist leicht, einzusehen, daß wenn der Werth des Buchstaben a, welchen wir größer als die Einheit annehmen wollen, immer beibehalten und der von b auf eine angemessene Art immer verändert wird, dadurch für c alle mögliche Zahlen erhalten werden können. In der That wird, wenn man $b = 0$ setzt, $c = 1$, und wenn b zunimmt, so werden die correspondirenden Werthe von c immer mehr und mehr die Einheit übertreffen und um so viel vermehrt werden können, als man nur immer will. Nimmt man hingegen b negativ, so verwandelt sich die Gleichung $a^b = c$ in $a^{-b} = c$ oder $\frac{1}{a^b} = c$, wo die Werthe von c immer mehr abnehmen und folglich so klein, als man nur immer will, werden können. Man kann also aus dieser Gleichung alle mögliche positive Zahlen, sowohl ganze als gebrochene ziehen, im Fall a die Einheit übertrifft. Eben so würde es sein, wenn man $a < 1$ hätte; allein die Werthe von c würden im umgekehrten Sinne wie im Vorhergehenden erscheinen; setzt man aber $a = 1$, so wird man immer $c = 1$ finden, was man auch der

Größe b für einen Werth geben möge; man muß daher im Folgenden a immer als von der Einheit wesentlich unterschieden betrachten.

Um besser anzuzeigen, daß der Werth von a unveränderlich und daß die beiden andern Größen b und c unbestimmt sind, wollen wir sie also durch die Buchstaben x und y vorstellen und wir haben die Gleichung $a^x = y$, worin jeder Werth von y zu einem Werthe von x stimmt, so daß die eine dieser Größen durch die andere bestimmt wird und umgekehrt.

§. 241.

Diese Erzeugung der Zahlen aus den Potenzen einer und derselben Größe wird nicht allein in Rücksicht auf die Algebra sehr wichtig, sondern auch wegen der Hülfsmittel, welche sie zur Abkürzung der Zahlenrechnungen darbietet. In der That, wenn man eine andere Zahl y' betrachtet, deren correspondirender Werth von x durch x' bezeichnet ist, wird man haben $a^{x'} = y'$, und wenn man y durch y' multiplicirt, so kommt

$$yy' = a^x \times a^{x'} = a^{x+x'};$$

dividirt man hingegen, so findet man

$$\frac{y'}{y} = \frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x};$$

nimmt man endlich die m^{te} Potenz und die n^{te} Wurzel von y, so erhält man

$$y^m = (a^x)^m = a^{mx}$$

für die erste, und

$$y^{\frac{1}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}$$

für die andere.

Aus den beiden ersten Resultaten folgt, daß man, wenn die Exponenten x und x', welche zu den Zahlen y und y' stimmen, bekannt sind, nur ihre Summe zu nehmen braucht, um den Exponenten zu erhalten, welcher zum Product yy' gehört, und daß ihre Differenz der Exponent des Quotienten

$\frac{y'}{y}$ sein wird. Die beiden letzten Gleichungen zeigen, daß der zu der $m$ten Potenz von y gehörige Exponent durch eine bloße Multiplication und der ihrer $n$ten Wurzel durch eine bloße Division erhalten wird.

Es ist hieraus leicht abzunehmen, daß sich die Multiplication irgend zweier Zahlen auf eine bloße Addition bringen ließe, wenn man eine Tabelle hätte, worin neben jeden der Werthe von y der dazu correspondirende Werth von x befindlich wäre, so daß man, wenn y gegeben wäre, x finden könnte und umgekehrt; denn man brauchte nur, anstatt die Multiplication mit diesen beiden Zahlen zu verrichten, die dazu gehörigen Werthe von x zusammen zu nehmen und in der Tafel die Zahl aufzusuchen, welche zu dieser Summe gehört; diese Zahl würde das gesuchte Product sein. Der Quotient der vorgelegten Zahlen würde sich in eben dieser Tafel neben der Differenz der beiden Werthe von x befinden, welche ihnen correspondiren, und die Division würde sich also durch eine Subtraction bewerkstelligen lassen.

Diese beiden Beispiele werden hinreichend zeigen, welchen Nutzen dergleichen Tabellen verschaffen können, auch ist der Gebrauch derselben seit Nepper, welcher sie zuerst erfunden hat, sehr ausgebreitet. Die Werthe von x werden darin die Logarithmen genannt und es sind folglich die Logarithmen nichts anders als die Exponenten der Potenzen, auf welche man eine unveränderliche Zahl erheben muß, um dadurch nach einander alle mögliche Zahlen zu erhalten.

Die unveränderliche Zahl heißt die Basis der Tafel oder des logarithmischen Systems.

In der Folge werden wir immer den Logarithmus von y durch $1y$ bezeichnen, wir werden also haben $x = 1y$, und da $y = a^x$, so wird kommen $y = ay$.

§. 242.

§. 242.

Da die Eigenschaften der Logarithmen von jedem besondern Werth der Zahl a oder ihrer Basis unabhängig sind, so folgt, daß man eine unendliche Anzahl verschiedener Tafeln bilden kann, wenn man dieser Zahl alle möglichen Werthe außer der Einheit giebt. Nehmen wir z. B. $a=10$, so werden wir haben $y=(10)^y$ und wir werden gleich finden, daß bei dieser Annahme die Zahlen

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 u. s. w.,

welche alle Potenzen von 10 sind, die Zahlen

0, 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w.

zu Logarithmen haben.

Man kann schon bei dieser Reihe die im vorhergehenden §. vorgetragenen Eigenschaften probiren; nimmt man nämlich die Logarithmen von 10 und von 1000, welche 1 und 3 sind, zusammen, so sieht man, daß ihre Summe 4 der Zahl 10000 correspondirt, welche das Product der vorgelegten Zahlen ist.

§. 243.

Die Logarithmen der zwischen 1 und 10, 10 und 100, 100 und 1000 u. s. w. liegenden Zahlen können durch Annäherung gefunden werden. Wenn man z. B. den Logarithmen von 2 haben wollte, so müßte man die Gleichung $(10)^x=2$ auflösen, indem man die in §. 221 gegebene Methode dabei anwendet und zuvörderst die ganze Zahl sucht, welche dem Werth von x am nächsten kommt. Man sieht gleich, daß x zwischen 0 und 1 enthalten ist, weil $(10)^0=1$, $(10)^1=10$; man wird also $x=\frac{1}{z}$ setzen und es wird alsdann kommen $(10)^{\frac{1}{z}}=2$ oder $10=2^z$; da nun z zwischen 3 und 4 liegen muß, so setze man $z=3+\frac{1}{z'}$ und so wird daraus erfolgen

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z'}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}}$$

oder $$2^{\frac{1}{z'}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

oder endlich $$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z'}.$$

Da der Werth von z zwischen 3 und 4 fällt, so setze man

$$z' = 3 + \frac{1}{z''};$$

und man wird haben

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z''}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}},$$

woraus man zieht

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{128}{125} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{128}{225}\right)^{z''} = \left(\frac{5}{4}\right);$$

nach einer kleinen Anzahl Versuche wird man finden, daß z'' zwischen 9 und 10 fällt. Man kann auf diese Art, so weit man will, fortfahren; da wir indessen dieses Verfahren nur beigebracht haben, um die Möglichkeit zu zeigen, die Logarithmen aller Zahlen finden zu können, so wollen wir uns begnügen, $z'' = 9$ zu setzen; wenn man nun zurückgeht, so findet man

$$z' = \frac{28}{9}, \quad z = \frac{93}{28}, \quad x = \frac{28}{93}.$$

Dieser Werth von x auf Decimalbrüche reducirt, ist bis auf die vierte Ziffer genau, denn er giebt

$$x = 0{,}30107;$$

und man weiß aus Rechnungen, welche mit mehrerer Genauigkeit ausgeführt sind, daß er, wenn man ihn bis auf 7 Decimalstellen berechnet,

$$x = 0{,}3010300$$

Um diesen Werth von x als den eines Exponenten zu betrachten, muß man sich ihn so erklären, daß wenn man die Zahl 10 zu einer Potenz vom Grade 3010300 erhebt und aus dem Resultate die Wurzel des Grades 10000000 zieht, eine Zahl, welche beinahe gleich 2 ist, vorkommen muß, das ist, man muß alsdann erhalten

$(10)^{\frac{3010300}{10000000}} = 2$; der erste Theil ist etwas größer als 2, indessen würde die Zahl $(10)^{\frac{3010299}{10000000}}$ etwas kleiner sein *).

§. 244.

Wenn man nach einander den Logarithmus von 2 durch 2, 3, 4 u. s. w. multiplicirt, so erhält man die der Zahlen

*) Die in diesem §. vorgetragene Methode würde für etwas große Zahlen nicht ausführbar sein; hier nun soll eine andere Methode vorgetragen werden, die von einem englischen Geometer, Namens Long, in den *Transactions philosophiques* für das Jahr 1724 in Nr. 339 bekannt gemacht wurde und welche sehr nützlich sein könnte.

Die Bestimmung des x in der Gleichung $(10)^x = y$ ist äußerst mühsam; man kann daher die Ordnung der Rechnung umkehren und machen, daß x gegeben sei, und alsdann daraus y berechnen, so wird man eine Tafel von vielen Werthen von y erhalten, welche mit denen von x correspondiren und welche in der Folge dienen, jedes verlangte x für y zu bestimmen, wie wir sogleich sehen werden.

Man sucht zuerst Werthe für x von 0,1 bis zu 0,9, und welche alle dazu beitragen den Werth von y, der zu $x = 0{,}1$ gehört, zu bestimmen, oder der $(10)^{\frac{1}{10}}$ ist, weil die andern Werthe von y, nämlich

$$(10)^{\frac{2}{10}}, \quad (10)^{\frac{3}{10}} \text{ u. s. w.,}$$

die 2te, 3te u. s. w. Potenz von der ersten sind.

Die Ausziehung der Quadratwurzel giebt zuerst

$$(10)^{\frac{1}{2}} \text{ oder } (10)^{\frac{5}{10}} = 3{,}162277660;$$

zieht man nun aus diesem Resultat die fünfte Wurzel, so erhält man

$$(10)^{\frac{1}{10}} = 1{,}258925412.$$

Durch ein ähnliches Verfahren zieht man aus

$$(10)^{\frac{1}{10}} = 1{,}258925412$$

den Werth von

$$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}} = (10)^{\frac{1}{20}} = (10)^{\frac{5}{100}} = 1{,}2201854;$$

nimmt man hieraus wieder die fünfte Wurzel, so erhält man

$$(10)^{\frac{1}{100}} = 1{,}023292992;$$

und dieses auf die 2te, 3te, ... 9te Potenz erhoben, erhält man die Werthe von y, welche denen von x correspondiren, von 0,9 bis 0,09.

Man begreift leicht, daß man nach dieser Methode die Werthe von y für die von x erhalten könnte, von 0,001 bis 0,009, von 0,0001 bis 0,0009, woraus man diese Tafel bilden könnte:

4, 8, 16 u. s. w., welche die 2te, 3te, 4te u. s. w. Potenzen von 2 sind.

Log.	Natürliche Zahlen.	Log.	Natürliche Zahlen.
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092106
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893193	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020724
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	1,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002302
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248694	7	1,000001611
6	1,013911386	6	1,000001381
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000690
2	1,004615794	2	1,000000460
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921459	4	1,000000092
3	1,000691015	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

Mittelst dieser Tafel läßt sich nun der Logarithmus zu einer jeden beliebigen Zahl finden, wenn man eine Zahl hinlängliche Male durch 10 dividirt. Um z. B. den für 2549 zu erhalten, dividire man zuvörderst durch $(10)^3$ oder mit 1000; denn dieses ist die höchste ganze Potenz von 10, welche darin enthalten sein kann, und man wird haben

Setzt man zum Logarithmus von 2 die Logarithmen von 10, 100, 1000 u. s. w. hinzu, so kann man die von 20, 200, 2000 u. s. w. davon ableiten; denn es ist offenbar, daß man nur die Logarithmen der Primzahlen zu wissen braucht, um die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen zu

---

$$2549 = (10)^3 \times 2{,}549;$$

nun suche man in der Tafel die Potenz von 10 unmittelbar unter der 2,549 und man wird finden

$$(10)^{0{,}4} = 2{,}511886432,$$

dividirt man nun diese letzte Zahl durch 2,549, so kommt

$$2{,}549 = (10)^{0{,}4} \times 1{,}014775177.$$

Sucht man in der Tafel noch die Potenz von 10 unmittelbar unter 1,014775177, so wird man finden

$$(10)^{0{,}006} = 1{,}01391386;$$

dividirt man alsdann mit dieser Zahl den vorhergehenden Quotienten 1,014775177, so wird man als dritten Quotienten haben 1,000851742.

So fährt man fort zu operiren, bis man zu einem Quotienten gelangt, der nur um eine Einheit von derjenigen Ordnung der Decimalbruchstelle, die man vernachläßigen will, unterschieden ist.

Sieht man hier den dritten Quotienten als der Einheit gleich an, so wird die gegebene Zahl in Factoren zerlegt sein, welche Potenzen von 10 sein werden, und man wird haben

$$2549 = (10)^3 \times (10)^{0{,}4} \times (10)^{0{,}006} = (10)^{3{,}406},$$

woraus man sieht, daß 3,406 der Logarithmus von der Zahl 2549 ist. Werden die Divisionen bis zur Zahl 7 getrieben, so wird man finden, daß dieser Logarithmus 3,406369 ist.

Dieselbe Tafel dient noch viel leichter, eine Zahl durch ihren Logarithmus zu finden; hier davon ein Beispiel:

Es sei 2,547 der gegebene Logarithmus, so wird die gesuchte Zahl sein

$$(10)^{2{,}547} = (10)^2 \times (10)^{0{,}5} \times (10)^{0{,}04} \times (10)^{0{,}007};$$

sie wird also gleich dem Producte der aus den citirten Tafeln genommenen Zahlen

$$(10)^2 = 100,$$
$$(10)^{0{,}5} = 3{,}162277660,$$
$$(10)^{0{,}04} = 1{,}096478196,$$
$$(10)^{0{,}007} = 1{,}016248694$$

sein, und man wird folglich haben

$$2{,}547 = \text{l. } 352{,}357.$$

Herr Dodson hat in England unter dem Titel *Anti-logarithmic-canon* eine Tafel derselben Art als diese herausgegeben, aber viel ausgedehnter, und deren Zweck ist, zu finden, zu welcher Zahl ein gegebener Logarithmus gehört.

finden, indem diese nur Potenzen oder Producte aus den Primzahlen sein können. Da z. B. die Zahl 210 dem Producte

$$2 \times 3 \times 5 \times 7$$

gleich ist, so wird ihr Logarithmus gleich sein

$$l\,2 + l\,3 + l\,5 + l\,7,$$

und da $5 = \frac{10}{2}$, so wird man haben

$$l\,5 = l\,10 - l\,2.$$

§. 245.

Die Logarithmen, welche immer in Decimalbrüchen ausgedrückt sind, müssen nothwendigerweise aus zweien Theilen zusammengesetzt sein, nämlich aus ganzen Einheiten, welche sich immer zur linken Seite des Komma befinden, und aus Decimalziffern, welche zur rechten Seite desselben befindlich sind. Der erste Theil führt den Namen **Charakteristik** (Kennziffer), weil wir in den Logarithmen, welche wir gegenwärtig betrachten, die aus der Annahme $a = 10$ entspringen und welche die **gewöhnlichen Logarithmen** genannt werden, vermittelst dieses Theils erkennen, zwischen welche Ordnung der Einheiten die Zahl fällt, deren Logarithmus gegeben ist. Alle Logarithmen der zwischen 1 und 10 enthaltenen Zahlen müssen, da sie zwischen 0 und 1 fallen, nothwendigerweise zur Charakteristik 0 haben; alle zwischen 10 und 100 enthaltene Zahlen haben 1, die zwischen 100 und 1000 begriffenen Zahlen haben 2, und überhaupt hat die Charakteristik so viele Einheiten als die vorgelegte Zahl Ziffern hat weniger Eins.

§. 246.

Eine nicht weniger wichtige Bemerkung ist die, daß die Logarithmen der Zahlen, die Zehnfache von einander sind, einerlei Decimalbruch haben, z. B.

54360 hat zum Logarithmus 4,7352794,
5436 3,7352794,
543,6 2,7352794,
54,36 1,7352794,
5,436 0,7352794;

denn da jede dieser Zahlen der Quotient von der ihr vorhergehenden, durch 10 dividirt, ist, so erhält man den Logarithmus der einen, wenn man von der Charakteristik der andern eine Einheit abzieht (§. 241, 242).

§. 247.

Aus dem, was in §. 240 gesagt ist, folgt, daß die Logarithmen von eigentlichen Brüchen in der gegenwärtigen Voraussetzung negativ sein müssen, und man leitet sie leicht von den Logarithmen der ganzen Zahlen ab, wenn man sich erinnert, daß jeder Bruch als ein Quotient angenommen werden könne, dessen Zähler der Dividendus, der Nenner aber der Divisor sei. Wenn der Zähler kleiner als der Nenner ist, so ist sein Logarithmus auch kleiner als der des Nenners, und man hat folglich, wenn man letzteren von dem ersteren abzieht, einen negativen Rest.

Um den Logarithmus von dem Bruch z. B. $\frac{1}{2}$ zu erhalten, zieht man von 0, als dem Logarithmus von 1, den Bruch 0,3010300, welcher den Logarithmus von 2 vorstellt, ab, und es kommt

— 0,3010300.

Wenn man von 0 die Zahl 1,3010300, welches der Logarithmus von 20 ist, abzieht, so erhält man den Logarithmus von $\frac{1}{20}$, gleich

— 1,3010300;

da 0,4771213 der Logarithmus von 3 ist, so wird der von $\frac{2}{3}$ sein

0,3010300 — 0,4771213 = — 0,1760913.

§. 248.

Durch die Art, wie man die Logarithmen der Brüche, abgesehen von ihren Zeichen, erhält, gehören sie (§. 241) zu dem Quotienten aus der Division des Nenners durch den Zähler, und entsprechen folglich der Zahl, mit welcher man die Einheit dividiren müßte, um den vorgegebenen Bruch zu erhalten. In der That kann z. B. $\frac{2}{3}$, unter der Form $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ gesetzt werden und $1\frac{3}{2} = 13 - 12 = 0{,}1760913$.

Es wäre wenig bequem, um den Werth des Bruchs zu finden, zu welchem ein gegebener Logarithmus gehört, die Zahl aufzusuchen, zu welcher der positiv genommene Logarithmus gehörte, weil man alsdann noch die Division der Einheit durch diese Zahl ausführen müßte; zieht man aber diesen Logarithmen von 1, 2, 3 u. s. w. Einheiten ab, so gehört der Rest zu der Zahl, welche den gesuchten Bruch ausdrückt, wenn man ihn in einen Decimalbruch verwandelt, weil diese Subtraction der Division der Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. durch die Zahl der vorgelegten Logarithmen entspricht.

Es sei z. B. — 0,3010300; wenn, ohne auf das Zeichen zu sehen, man diesen Logarithmen von 1 oder von 1,0000000 abzieht, so zeigt der Rest 0,6989700, da er zu 5 gehört, daß der gesuchte Bruch gleich 0,5 ist, weil man die Einheit als aus 10 Theilen bestehend gedacht hat.

Wenn man den Logarithmus von einem Bruche sucht, so denkt man sich sofort die Einheit aus 10 oder 100 oder 1000 oder u. s. w. Theilen gebildet, oder, welches auf eins hinausläuft, wenn man die Kennziffer vom Logarithmus des Zählers um eine hinlängliche Anzahl von Einheiten vermehrt, damit man den Logarithmus des Nenners abziehen kann, so wird man auf diese Weise einen positiven Logarithmus erhalten, der statt des oben erwähnten gebraucht werden könnte.

Um in die Rechnungen mehr Gleichförmigkeit zu bringen, vermehrt man öfters die Kennziffer vom Logarithmus des Zählers um 10 Einheiten. In Bezug auf den Bruch $\frac{2}{3}$ hat man z. B.

10,3010300 — 0,4771213 = 9,8239087.

Es ist leicht, zu sehen, daß dieser Logarithmus den negativen — 0,1760913 um 10 Einheiten übertrifft, und daß folglich, so oft man ihn zu andern addirt, man im Resultat 10 Einheiten zu viel einführt; aber die Subtraction dieser 10 Einheiten soll nicht als eine Operation angesehen werden, und wenn sie ausgeführt sein wird, so wird man zu gleicher Zeit die von 0,176013 ausgeführt haben. In der That, es sei N die Zahl, zu welcher man den positiven Logarithmus 9,8239087 addirt, so wird das Resultat der Rechnung vorgestellt sein durch

$$N + 10 - 0{,}1760913,$$

und wenn man 10 davon abzieht, so wird man bloß haben

$$N - 0{,}1760913.$$

Nach dem, was vorhergehet, verwandelt man die Subtraction in eine Addition, wenn man statt der zu subtrahirenden Zahl ihre **arithmetische Ergänzung (Complement)** anwendet, d. h. das was übrig bleibt, wenn man diese Zahl von einer der Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. abzieht, ein Resultat, welches erhalten wird, wenn man von 10 die simpeln Einheiten der vorgegebenen Zahl abzieht, und alle andern von 9; nachdem dieses geschehen, addirt man diese Ergänzung zu der Zahl, von welcher man die gegebene subtrahiren sollte, und zieht von der Summe eine Einheit von der Ordnung ab, zu welcher man die Ergänzung genommen hat.

Es ist einleuchtend, daß wenn die Ergänzung mehreremale wiederholt wird, so müßte man, nach der Addition, so viel Einheiten von der Ordnung, zu welcher man die Ergänzung genommen hat, abziehen, als in ihrem Multiplicator enthalten sind; und aus der nämlichen Ursache, wenn man

mehrerere Ergänzungen anwendet, wird es nothwendig, für jede die Einheit, zu welcher sie genommen werden, zu subtrahiren, oder so viele Einheiten, als Ergänzungen da sind, wenn sie alle zu einerlei Einheit genommen worden sind.

Oefters kann diese Subtraction nicht vollzogen werden; das Resultat ist alsdann die arithmetische Ergänzung von dem Logarithmus eines Bruchs und entspricht in den Tafeln dem Ausdrucke dieses Bruchs in einen Decimalbruch verwandelt. Wenn noch 10 Einheiten von der Kennziffer zu subtrahiren bleiben, welches der gewöhnlichste Fall ist, so wäre dies eben so viel als hätte man mit 10000000000 den Nenner des gesuchten Bruchs multiplicirt, um mit dem Nenner die Division ausführen zu können; die Kennziffer vom Logarithmus des Quotienten lehrt, welche die höchste Ordnung der Einheiten sei, welche dieser Quotient in Bezug auf die des Dividendus enthält. In 9,8239087 zeigt die Kennziffer 9, daß der Quotient eine Ziffer weniger haben muß als die Zahl, womit man die Einheit multiplicirt hat; und folglich, wenn, um den Quotienten auf seinen wahren Werth zu bringen, man 10 Decimalziffern abschneidet, so wird ihre erste geltende Ziffer zur Linken Zehntel sein; man würde nur Hunderttel, Tausendtel u. s. w. für die Zahlen finden, deren arithmetische Ergänzung die Kennziffern 8, 7 u. s. w. hätte.

§. 249.

Was oben von dem System der Logarithmen, in welchem $a = 10$, gesagt worden ist, begreift die allgemeinen und nothwendigen Sätze, um einen Begriff von der Tafel zu bekommen, welche beinahe immer mit einer Einleitung in Rücksicht auf ihre besondere Anordnung und ihren Gebrauch versehen ist und auf welche wir die Leser verweisen wollen. Ich würde dazu die Tafeln von Callet (Stereotyp-Ausgabe) und die von Borda empfehlen, welches die ausführlichsten und bequemsten sind.

§. 250.

Wenn man einmal den Logarithmus einer Zahl y für einen besondern Werth von a oder für eine besondere Basis kennt, so kann man leicht den Logarithmus derselben Zahl in einem andern System erhalten. In der That würde man, wenn $a^x = y$, für eine andere Basis A haben $A^X = y$, wo X von x verschieden ist; hieraus zieht man $A^X = a^x$. Nimmt man von beiden die Logarithmen nach dem System, dessen Basis a ist, so erhält man

$$1 A^X = 1 a^x;$$

da aber nach der Annahme $1 a^x = x$ und $1 A^X = X 1 A$ (§. 241), so folgt $X 1 A = x$ oder $X = \frac{x}{1 A}$; da nun aber, wenn man A als Basis annimmt, X der Logarithmus von y in dem zu diesem System gehörigen Basis sein würde; so wird man, wenn diese letztere, um sie von der andern zu unterscheiden, durch Ly bezeichnet wird,

$$Ly = \frac{1y}{1A}$$

erhalten, und man findet also den Logarithmus von y im zweiten System, wenn man dessen Logarithmus im ersten System durch den Logarithmus der Basis des zweiten Systems dividirt.

Die vorhergehende Gleichung giebt auch $\frac{1y}{Ly} = 1A$, woraus zu ersehen ist, daß zwischen den Logarithmen $1y$ und Ly, was auch y für eine Zahl sein mag, immer dasselbe unveränderliche Verhältniß Statt findet, welches durch $1A$ ausgedrückt ist.

§. 251.

Der Logarithmus von 1 ist in jedem System immer Null, weil man, was auch a sein mag, immer $a^0 = 1$ hat. Wenn $a > 1$ ist, so können die Logarithmen nach Maaßgabe als die Zahlen zunehmen, unbegrenzt wachsen; man sagt, sie

werden mit den Zahlen zugleich unendlich; und da, wenn y ein ächter Bruch ist, man $y = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$ hat, so sieht man, daß je mehr y abnimmt, je mehr muß x negativ zunehmen, daß man aber demungeachtet niemals für x eine Zahl angeben kann, die y genau zu Null macht. Dieses ist der Sinn, in welchem man sagen darf: der **Logarithmus von Null ist negativ unendlich**, wie man es in vielen Tafeln findet.

§. 252.

Wir wollen einige Beispiele von dem Gebrauch der Logarithmen bei der Zahlenrechnung der Formeln zeigen. Es folgt aus §. 241 und aus der Erklärung vom Logarithmus, welche die Gleichung $a^{1y} = y$ giebt, daß

$$1(AB) = 1A + 1B, \quad 1\left(\frac{A}{B}\right) = 1A - 1B,$$

$$1A^m = m\,1A, \quad 1A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}1A.$$

Wenden wir diese Regeln auf die Formel

$$\frac{A^2\sqrt{B^2 - C^2}}{C\sqrt[5]{D^3\,E\,F}},$$

an, welche ziemlich verwickelt ist, so findet man

$$1(A^2\sqrt{B^2 - C^2}) = 1[A^2\sqrt{(B + C)\,B - C)}] =$$

$$2\,1A + \tfrac{1}{2}1(B + C) + \tfrac{1}{2}1(B - C),$$

$$1(C\sqrt[5]{D^3\,EF}) = 1C + \tfrac{3}{5}1D + \tfrac{1}{5}1E + \tfrac{1}{5}1F,$$

und folglich

$$1\left(\frac{A^2\sqrt{B^2 - C^2}}{C\sqrt[5]{D^3\,EF}}\right) =$$

$$2\,1A + \tfrac{1}{2}1(B+C) + \tfrac{1}{2}1(B-C) - 1C - \tfrac{3}{5}1D - \tfrac{1}{5}1E - \tfrac{1}{5}1F.$$

Wenn man von $1C$, $\frac{3}{5}1D$, $\frac{1}{5}1E$, $\frac{1}{5}1F$ die decadischen Ergänzungen genommen und sie durch C', D', E', F' bezeichnet hätte, so würde man statt des vorhergehenden Resultats folgendes erhalten:

$$2\,1A + \tfrac{1}{2}1(B + C) + \tfrac{1}{2}1(B - C) + C' + D' + E' + F',$$

von welcher Summe so viele Einheiten der Ordnung, nach welcher diese Ergänzungen genommen sind, abgezogen werden müssen, als man dieser Ergänzungen genommen hat, das ist 4. Nachdem man den Logarithmus der vorgelegten Formel gefunden hat, kann man in den Tafeln die diesen Logarithmen zugehörige Zahl finden, welche der gesuchte Werth ist.

§. 253.

Die häufigste Anwendung der Logarithmen ist die, welche man davon bei Aufsuchung des vierten Gliedes einer Proportion macht. Es ist offenbar, daß man, wenn $a:b=c:d$, alsdann haben wird

$$d=\frac{bc}{a}, \text{ woraus folgt } 1d=1b+1c-1a;$$

das ist, der Logarithmus des gesuchten vierten Gliedes ist gleich der Summe der Logarithmen beider mittlern Glieder weniger dem Logarithmus des bekannten äußern Gliedes, oder besser, der Summe der Logarithmen beider mittlern Glieder nebst der decadischen Ergänzung des Logarithmen des bekannten äußern Gliedes.

§. 254.

Wen man den Logarithmus von jedem Theil der Gleichung $\frac{b}{c}=\frac{d}{a}$ nimmt, welche die Eigenschaft der Proportion ausdrückt, so wird man haben

$$1b-1a=1d-1c \quad (\S.\ 252),$$

woraus folgt, daß die vier Logarithmen

$$1a\ .\ 1b : 1\ .\ d,$$

eine arithmetische Proportion bilden (§. 223).

Die Reihe der Gleichungen

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d} \text{ u. s. w. } (\S.\ 231)$$

führt ebenfalls auf

$1b - 1a = 1c - 1b = 1d - 1c = 1e - 1d$ u. s. w.,
und man sieht hieraus, daß die geometrische Progression

$$\therefore a : b : d : e : \text{u. s. w.}$$

mit der arithmetischen

$$\div 1a \,.\, 1b \,.\, 1c \,.\, 1d \,.\, 1e \,.\, \text{u. s. w.}$$

correspondirt, und daß folglich die Logarithmen der in einer geometrischen Reihe fortgehenden Zahlen in einer arithmetischen Reihe fortgehen.

§. 255.

Wenn man die Gleichung $b^z = c$ hätte, so könnte man sie vermittelst der Logarithmen leicht auflösen; denn da $1b^z$ gleich $z1b$, so würde man haben $z1b = 1c$, und folglich $z = \frac{1c}{1b}$. Die Gleichung $b^{e^z} = d$ würde sich auf eben die Art behandeln lassen; setzt man nämlich $c^z = u$, so kommt

$$b^u = d, \quad u1b = 1d, \quad u = \frac{1d}{1b} \text{ oder } c^z = \frac{1d}{1d};$$

nimmt man von neuem die Logarithmen, so würde man finden

$$z1c = 1\left(\frac{1d}{1b}\right) = 11d - 11b \text{ und } z = \frac{11d - 11b}{1c}.$$

In diesem letzten Ausdruck bezeichnet $11b$ den Logarithmus des Logarithmus von b, welcher erhalten wird, wenn man diesen Logarithmus als eine Zahl betrachtet. Die Größen b^z, b^{e^z} und alle, die sich daraus herleiten lassen, werden Exponentialgrößen genannt.

Einige Aufgaben über die Berechnung der Zinsen vom Gelde.

§. 256.

Die Theorie der geometrischen Progressionen und die der Logarithmen findet ihre Anwendung bei den Speculationen in Betreff der Interessen des Geldes. Um das, was

wir über diesen Gegenstand sagen wollen, recht verstehen zu können, muß man wissen, daß die Vortheile, welche eine Summe Geldes demjenigen verschafft, der sie benutzen kann, das heißt, der sie anwendet, es sei daß er Waaren dafür einhandelt oder vortheilhafte Arbeiten verfertigen läßt, desto größer sind, je öfter er diese Tausche wiederholen oder an Arbeiten erneuern kann; hieraus folgt, daß derjenige, welcher eine Summe Geldes leihet, um sie anzuwenden, zur Entschädigung für die Vortheile, welche der Eigenthümer während der Zeit als sie der erste hatte, damit hätte ziehen können, nach Verlauf dieser Zeit noch einigen Ersatz zu obiger Summe hinzulegen muß. Diese Vorstellung muß man sich von den Interessen des Geldes machen. Um sie zu bestimmen, bezieht man alle Summen auf die von 100, welche für die Einheit genommen wird und vergleicht sie dann, wie viel man von dieser, z. B. am Ende eines Jahrs, geben soll. Es ist hier der Ort nicht, die Umstände aus einander zu setzen, welche bei jeder Art Speculationen die Interessen erhöhen oder erniedrigen; diese können nur in der politischen und kaufmännischen Arithmetik abgehandelt werden, welchen die Berechnung des Wahrscheinlichen vorhergehen muß, und es ist hier davon die Rede, nur einige Fragen aufzulösen, welche die geometrischen Progressionen darbieten.

Ich setze überhaupt voraus, daß durch Vertrag angegeben sei, w viel jährliche Zinsen von 1 gegeben werden sollen und bezeichne mit r diese jährliche Zinsen; es ist also einleuchtend, daß die jährlichen Zinsen von 100 sein werden $100r$ und die von einer beliebigen Sunime a wird durch ar ausgedrückt sein; und wenn man diese letztere mit α bezeichnet, so wird man haben

$$\alpha = ar.$$

Durch diese Relation ist es leicht, die Interessen für eine beliebige Summe zu finden, wenn man weiß was 100 Thaler oder auch jede andere Summe während einer bekannten

Zeit giebt; diese Aufgabe heißt die **Berechnung einfacher Zinsen.**

§. 257.

Wenn aber der Gläubiger, anstatt mit jedem Jahre die Interessen des Kapitals, welches er vorgeschossen hat, abzufordern, sie dem Schuldner läßt, um sie im folgenden Jahre mit der Summe zusammen genommen benutzen zu können, so würde zu Ende des folgenden Jahres das Kapital einen Werth erhalten haben, welchen man folgendermaßen findet. Da das erste Kapital, welches a war, um die Interessen ar vermehrt wird, so wird es zu Ende des ersten Jahres

$$a + ar = a\,(1 + r)$$

werden. Wenn man nun

$$a\,(1 + r) = a'$$

setzt, so würde, da die Interessen der Summe a' auf ein Jahr $a'r$ sind, die der Summe $a\,(1+r)$ und auf ein zweites Jahr $ar\,(1+r)$ sein, und da am Ende des ersten Jahres das Kapital a nebst den Interessen, welche es bringen soll, zusammen genommen $a\,(1+r)$ geworden ist, so wird das Kapital a' zu Ende des zweiten Jahres werden

$$a'\,(1 + 1) = a\,(1 + r)^2 = a''.$$

Wenn nun der Gläubiger zu Ende des zweiten Jahres das Kapital a'' noch nicht zurück bekömmt und es ferner ein drittes Jahr stehen läßt, so wird er ihm nach den vorhergehenden schuldig sein

$$a''\,(1 + r) = a\,(1 + r)^3 = a'''.$$

Man sieht leicht ein, daß sich nach dem vierten Jahre a''' in

$$a'''\,(1 + r) = a\,(1 + r)^4$$

verwandeln würde, und so fort; es werden also die zu Anfange geliehene Summe und die mit dem ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. Jahr zu zahlende Summe diese geometrische Reihe bilden

$$\therefore a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : a(1+r)^4 : \text{u. s. w.},$$

deren

deren Name $1+r$ und deren allgemeines Glied

$$a\,(1+r)^n = A$$

ist, wo n die Anzahl der seit dem Anfange des Leihens verflossenen Jahre angiebt.

Der gewöhnliche Zinsfuß ist 5 für 100 (5 Prozent), das ist, man muß für 100 Thaler nach einem Jahre 105 Thaler geben; in diesem Falle ist

$$100r = 5 \text{ oder } r = \tfrac{5}{100} = \tfrac{1}{20}, \text{ und } 1+r = \tfrac{21}{20}.$$

Wollte man nun wissen, was eine dergestalt ausgeliehene Summe nach 25 Jahren z. B. betragen würde, so müßte man setzen

$$n = 25, \text{ und } a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$$

würde man statt der ausgeliehenen Summe erhalten. Die 25ste Potenz von $\frac{21}{20}$ läßt sich vermittelst der Logarithmen finden, weil nach §. 252

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 25\,l\tfrac{21}{20} = 25(l\,21 - l\,20) = 0{,}5297322,$$

welches giebt

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 3{,}386 \text{ beinah, } A = 3{,}386\,a;$$

und man sieht hieraus, daß 1000 Thaler, auf diese Art verliehen, nach 25 Jahren auf 3386 Thaler anwachsen, wenn man die Interessen mitrechnet u. s. w.

Hätte man eben dieses Kapital 100 Jahre ausstehen lassen, so fände man

$$A = a\left(\frac{21}{20}\right)^{100} = 131\,a$$

beinah; also würden nach diesem Zeitraum 1000 Thaler ungefähr 131000 Thaler bringen. Diese Exempel zeigen, mit welcher Schnelligkeit sich die Kapitalien vermehren, wenn man die zusammengesetzten Interessen hinzuschlägt.

§. 258.

Die Gleichung

$$A = a\,(1+r)^n$$

giebt zu vier Aufgaben Anlaß; die erste nämlich, wenn a, r

und n bekannt sind, A zu finden, bietet sich jedesmal dar, wenn man untersucht, was das Kapital nach einer Anzahl von n Jahren wird; hiervon haben wir oben ein Beispiel gegeben.

Die zweite, wenn a, A und n bekannt sind, r zu finden, führt aus dem Anfangs ausgeliehenen Kapital, demjenigen, zu welchem es herangewachsen ist, und der Zeit, während welcher es gestanden hat, auf einen Zinsfuß; man hat in diesem Falle

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

Die dritte, von A, r und n zu finden a, und für welche erhalten wird

$$a = \frac{A}{(1+r)^n},$$

hat zum Gegenstande das Kapital zu bestimmen, welches man ausleihen muß, um nach n Jahren mit Recht eine Summe A fordern zu können.

Die vierte, aus A, a und r zu finden n, kann nur durch Logarithmen aufgelöst werden (§. 238, 252). Nimmt man den eines jeden Theils der vorgelegten Gleichung, so erhält man

$$\mathrm{l}A = \mathrm{l}a + n\,\mathrm{l}(1+r),$$

woraus folgt

$$n = \frac{\mathrm{l}A - \mathrm{l}a}{\mathrm{l}(1+r)}.$$

Durch diese letztere findet man, nach wie viel Jahren das Kapital a eine Summe A hervorgebracht hat.

Um hiervon ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, es werde gefragt, nach wie viel Jahren sich die ausgeliehene Summe verdoppeln werde, wenn der Zinsfuß immer $5\frac{0}{0}$ bleibt; man wird alsdann haben

$$A = 2a, \qquad \mathrm{l}A = \mathrm{l}a + \mathrm{l}2$$

und folglich

$$n = \frac{\mathrm{l}2}{\mathrm{l}\frac{21}{20}} = \frac{\mathrm{l}2}{\mathrm{l}21 - \mathrm{l}20} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}21$$

beinahe.

§. 259.

Folgende Aufgabe ist eine der verwickeltsten, welche man

gewöhnlich über diesen Gegenstand vorlegt. Man nimmt an, daß der Gläubiger zu Ende eines jeden Jahres zur Summe des ersten Jahres noch eine neue Summe hinzulegt und dieses während einer Anzahl n Jahre fortsetzt; man fragt, was diese verschiedenen Kapitalien mit ihren zusammengesetzten Interessen zusammen genommen betragen werden. Es seien $a, b, c, d \ldots\ldots k$ die Summen, welche im ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. eingelegt werden; da die Summe a in den Händen des Schuldners n Jahre bleibt, so wird sie auf

$$a\,(1 + r)^n$$

anwachsen; die Summe b, welche er nur $n - 1$ Jahr hat, verwandelt sich in

$$b\,(1 + r)^{n-1},$$

Die Summe c, welche nur $n - 2$ Jahre ausgeliehen wird, giebt

$$c\,(1 + r)^{n-2},$$

und so von den übrigen; endlich wird die letzte Summe k, welche nur ein Jahr ausgeliehen war, auch nur geben:

$$k\,(1 + r);$$

man wird also haben

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} \ldots\ldots + k(1+r).$$

Wenn man nun jedes Glied des zweiten Theils besonders berechnet, so erhält man den Werth von A.

Diese Operation wird außerordentlich vereinfacht, wenn

$$a = b = c = d \ldots\ldots = k,$$

denn in diesem Falle hat man

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \ldots\ldots + a(1+r);$$

der zweite Theil bildet eine geometrische Reihe, deren erstes Glied $a(1+r)$, das letzte $a(1+r)^n$ und der Name $1+r$ ist, deren Summe folglich

$$\frac{a\,(1+r)^{n+1} - a\,(1+r)}{r} \quad (\S.\ 232),$$

ist, man wird also alsdann haben

$$A = \frac{a\,(1+r)\,[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Diese Gleichung bietet ebenfalls vier Aufgaben dar welche mit denen correspondiren, die wir in Rücksicht auf die Gleichung

$$A = a\,(1 + r)^n$$

vorgetragen haben.

§. 260.

Was man **Annuitäten** (Jahresrenten) nennt, ist das Umgekehrte vom Vorhergehenden; hierbei entledigt sich der Schuldner des Kapitals nebst Interessen durch mehrere in gleichen Zeiten geleistete Zahlungen. Die vom Schuldner vor der Zahlzeit geleistete Zahlung kann als ein Vorschuß betrachtet werden, welchen er dem Gläubiger auf Abschlag gegen die Schuld giebt, und der Werth desselben hängt von der Anzahl Jahre ab, welche zwischen dem einen und dem andern Zeitraum verflossen sind. Wenn man jede Zahlung durch a bezeichnet, so wird die erste Zahlung, welche $n-1$ Jahre vor Ablauf des letzten Termins, in Rücksicht auf diesen ersten, geschehen ist, nothwendigerweise $a(1+r)^{n-1}$ werth sein; die zweite, von eben dieser Zeit an gerechnet, wird nur $a(1+r)^{n-2}$ werth sein; die dritte $a(1+r)^{n-3}$, und so von den übrigen bis zur letzten, welche nur den Werth a hat. Andererseits würde, wenn die geliehene Summe durch A vorgestellt ist, solche in den Händen des Schuldners nach n Jahren $A(1+r)^n$ werth sein, welches Kapital der Summe aller Bezahlungen gleich sein muß, welche der Gläubiger von ihm erhalten hat; man wird also haben

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} \ldots + a$$

oder, wenn man die Summe der Progression nimmt, die der zweite Theil bildet,

$$A\,(1+r)^n = \frac{a\,[(1+r)^n - 1]}{r},$$

eine Gleichung, in welcher man wechselsweise A für die unbekannte nehmen kann, welche ich den Werth der Annuität nenne, weil sie die Summe vorstellt; die Größe a, welche die

Quotität der Annuität ist; die Größe r, welche der Zins von 1 ist, und endlich die Größe n, welche die Dauer der Annuität ausdrückt. Um diese letztere zu finden, muß man nothwendigerweise zu den Logarithmen seine Zuflucht nehmen; man befreie erstlich $(1+r)^n$, welches giebt

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar},$$

und wenn man die Logarithmen nimmt, so kommt

$$n\,l\,(1+r) = l\,a - l\,(a - Ar),$$

woraus folgt

$$n = \frac{l\,a - l\,(a - Ar)}{l\,(1+r)}.$$

§. 261.

Um den Gebrauch von den obigen Formeln zu zeigen, werde ich sie auf folgende Aufgabe anwenden:

Wie viel muß jährlich abgezahlt werden, um eine Schuld von 100 Thalern nebst Zinsen à 5 Procent jährlich in 12 Jahren zu tilgen.

In diesem Beispiele kennt man die Größen

$$A = 100, \quad n = 12, \quad r = \frac{1}{20}$$

und man verlangt die jährliche Rente a; die Gleichung

$$A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$$

in Bezug auf den Buchstaben a aufgelöset, giebt

$$a = \frac{Ar\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

In diesen Ausdruck muß man die Werthe der Buchstaben A, r und n setzen, und mehrerer Leichtigkeit halber, vorab, mittelst der Logarithmen, die Größe $(1+r)^n$, die hier $(\frac{21}{20})^{12}$ ist, berechnen, und man wird finden

$$(\tfrac{21}{20})^{12} = 1{,}79586.$$

Vermittelst dieses Werths erhalten wir

$$a = \frac{100 \cdot \frac{1}{20} \cdot 1{,}79586}{1{,}79586 - 1} = \frac{5 \cdot 1{,}79586}{0{,}79586};$$

und wenn wir den letzten Ausdruck unmittelbar oder durch Logarithmen berechnen, so wird man finden

$$a = 11{,}2826;$$

es bedürfte also einer Jahrrente von 11,28 Thaler, um in 12 Jahren 100 Thaler Kapital nebst jährlichen Zinsen à 5 Procent zu tilgen.

§. 262.

Eine weitere Auseinandersetzung dieser Aufgabe würde die Grenzen überschreiten, die ich mir hierbei vorgesetzt habe; indessen will ich noch erinnern, daß man, um den Werth verschiedener Summen in Rücksicht auf denjenigen zu berechnen, welcher sie zahlen oder empfangen soll, alle diese Summen auf einerlei Zeitmoment reduciren muß, das heißt, man muß untersuchen, was sie in einem und demselben Zeitmoment an Kapital werth sind. Es habe z. B. ein Banquier nach n Jahren eine Summe a zu zahlen; um sich hiervon zu entledigen, giebt er einen Wechsel, dessen Werth durch b ausgedrückt ist und welcher nach p Jahren zahlbar ist; bringt man nun die erste Summe auf den Augenblick zurück, worin dieser Banquier den Wechsel auf die Summe b gegeben hat, so wird diese erste Summe nur $\frac{a}{(1+r)^n}$ werth sein, weil diese als der erste Werth eines Kapitals angesehen werden muß, das nach n Jahren auf a anwächst; aus eben dieser Ursache wird die Summe b in eben diesem Augenblick nur $\frac{b}{(1+r)^p}$ werth sein; die Differenz

$$\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}$$

wird also, je nachdem sie positiv oder negativ wird, angeben, was dieser Banquier nach diesem Tausch noch zu zahlen oder zu empfangen hat; und wenn dieser Ueberschuß nach einer Anzahl q Jahre zahlbar wäre, so wird er, wenn man seinen Werth im Augenblick des Handels durch c bezeichnet,

$$c\,(1+r)^q$$

werden; er würde also werth sein

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q = a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p}.$$

Die Summen a, b .... k im §. 259 sind alle auf den Augenblick reducirt worden, wo die Summe A bezahlt werden soll; und im §. 260 ist jede der Zahlungen so wie die Summe A auf den Zeitpunct gebracht worden, wo sich die Annuität endigt.

Ende des ersten Theils.

Zusatz.

Die auf Seite 110 angezeigte Note.

In den §§. 66 und 75 habe ich die negativen Werthe durch Untersuchung der Gleichung, welche sie unmittelbar prüfen, ausgelegt, wie ich es vorher gemacht hatte, und dieses Mittel scheint mir immer richtig, weil es nur darauf ankommt, zu zeigen, daß diese Werthe einen richtigen Sinn haben, indem sie Aufgaben auflösen, die den vorgegebenen analog sind; allein es giebt zuweilen mehrere Arten, diese Aufgaben zu bilden, und die folgende, die mir von dem verstorbenen Herrn Français, einem ausgezeichneten Geometer und Professor bei der Artillerieschule zu Mainz mitgetheilt worden, hat mir einfacher geschienen als die man in diesen Anfangsgründen findet.

„Er glaubt, daß man in dem Vortrag der Aufgabe in §. 65 den „Begriff vom Abgange der Boten beseitigen müßte, um annehmen zu kön„nen, daß beide seit einer unbestimmten Zeit unterweges sind, und sie müßte „dieserhalb so abgefaßt werden: Zwei Boten gehen denselben Weg „in derselben Richtung $C'ABC$ (Seite 98); nachdem jeder eine „beliebige Zeit gegangen hat, befindet sich der eine in A „in dem Augenblick, wo der andere in B ist; man kennt ihre „Geschwindigkeit und die Entfernung AB. Man fragt, in „welchem Punkt des Weges sie sich begegnen?"

Dieser Vortrag führt zu derselben Gleichung als die in §. 65; aber „sobald die Stetigkeit der Bewegung fest gestellt ist, so erklärt sich der ne„gative Werth, ohne daß es nöthig sei, die Richtung von einem der Boten „zu verändern. In der That, da ihre Bewegung nicht in den Punkten A „und B angefangen hat, sondern da beide vor dem Moment, wo sie als „in diesem Punkte angelangt gedacht werden, sich bereits auf die nämliche „Weise während einer unbestimmten Zeit bewegt hätten, indem sie von C' „nach B gingen; so ist es leicht, zu begreifen, daß der Bote, der bei diesem „Punkt dem Boten voreilt, der alsdann in A ist und langsamer fortgeht,

„sich in einem gewissen Zeitpunkt hat hinter diesem befinden und ihm „vor seiner Ankunft im Punct A begegnen müssen. Das Zeichen — zeigt „alsdann an (wie bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie), „daß man die Entfernung AR' in dem entgegengesetzten Sinne der „Entfernung AR nehmen muß, die man als positiv angesehen hat. Die „in dem Vortrag zu machende Veränderung, damit der negative Werth „positiv wird, reducirt sich darauf, festzusetzen, daß die Boten sich vor der „Ankunft in A hätten begegnen sollen, statt es nachher zu thun."

In der That, wenn man den Punkt R' zwischen A und C' setzt, statt ihn zwischen A und B zu setzen, so findet man $AB = BR' - AR'$, woraus die Gleichung $y - x = a$ hervorgeht, statt $x - y = a$, welche man zuerst erhalten hatte, und es ist nicht nöthig, die Zeichen von c zu ändern, da die zweite Gleichung $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$ bleibt.

Herr Français wendet nicht weniger glücklich diese Betrachtungen auf den Fall in §. 75 an, indem er die Boten durch bewegliche Dinge ersetzt, die einer stetigen und seit einer unbestimmten Zeit angefangenen Bewegung unterworfen sind. Er trägt die Aufgabe so vor: „Zwei bewegliche „Körper bewegen sich gleichförmig mit gegebener Geschwin„digkeit auf der geraden Linie CB (Seite 109), der eine in „der Richtung BC, der andere in der Richtung CB; derjenige, „der sich in dem ersten Sinne bewegt, befindet sich eine be„kannte Stundenzahl früher in B, bevor der andere in A „angekommen sei. Man frägt, in welchem Punkt der unbe„grenzten geraden Linie BC sie zusammentreffen."

„Die Auflösung $x = -48$ Kilometer will sagen, daß die beiden be„weglichen Körper sich im Punkt R begegnet haben, bevor derjenige, der von „C nach B kommt, im Punkt A angekommen war, und ehe der zweite, der „von B nach C gehet, im Punkt C angekommen sei, wo er sich befindet, wenn „der andere im Punct A ist."

Die dem Punkt R zugeschriebene Lage bestätigt sich, wenn man bemerkt, daß daraus hervorgeht $AC = BC - AB = cd - a$, statt $a + cd$, welches man zuerst (Seite 108) erhalten hatte, und daß folglich $\frac{x}{b} = \frac{cd - a - x}{c}$, eine Gleichung, welche $x = 48$ giebt.

Auf diese Art ist keine Umkehrung in der Richtung der Bewegung zu machen; die materiellen Umstände der Aufgabe sind in der That geändert, und wie ich es oben gesagt habe, so beweist dieses, daß es mehrere physische Aufgaben giebt, die den nämlichen mathematischen Relationen entsprechen; allein die obigen Vorträge haben den Vorzug, das Gesetz der Stetigkeit nicht zu verletzen und nähern sich also der Betrachtung der Linien, die auf die einfachste und allgemeinste Art die Umstände der Zeichenveränderung von den Größen mahlt. (Siehe die Trigonometrie und Anwendung der Algebra auf die Geometrie.)

Gedruckt bei Johann Friedrich Starcke.

Staatl. Bibliothek Passau

Juli.

1. Obstgarten	I	I
2. Hausen	II.	II
3. Mittelfeld	III	III
4. Brunnfeld	III	III.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lacroix, S. F.,

Silv. Franc. Lacroix's Algebra

Bd.: 1

Berlin 1821

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 102-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346091-6